



Universidade de Brasília

# O problema de Björling no espaço $\mathbb{L}^3$

Ian Moraes de Farias

DISSERTAÇÃO APRESENTADA  
AO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
MESTRE EM MATEMÁTICA

Orientador: Prof. Dr. José Luis Teruel Carretero.

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES.

Brasília, fevereiro de 2019.



Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# O problema de Björling no espaço $L^3$

por

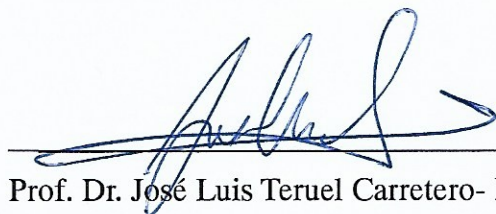
Ian Moraes de Farias

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da  
Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau  
de*

**MESTRE EM MATEMÁTICA**

Brasília, 22 de fevereiro de 2019.

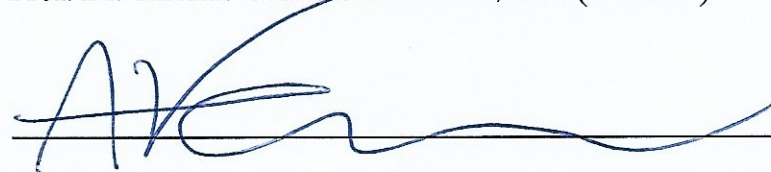
Comissão Examinadora:



Prof. Dr. José Luis Teruel Carretero- MAT/UnB (Orientador)



Prof. Dr. Tarcísio Castro Silva- MAT/UnB (Membro)



Prof. Dr. Álvaro Krüger Ramos- UFRGS (Membro)

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

FF224p      Farias, Ian Moraes de  
              O problema de Björling no espaço  $L^3$  / Ian Moraes de  
Farias; orientador José Luis Teruel Carretero. -- Brasília,  
2019.  
              67 p.

              Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) --  
Universidade de Brasília, 2019.

              1. Problema de Björling. 2. Superfícies máximas. 3. Espaço  
tempo de Lorentz-Minkowski  $L^3$ . I. Carretero, José Luis  
Teruel, orient. II. Título.

# Agradecimentos

À minha família. Em especial aos meu pais, Adriana Maria Carneiro da Cunha Moraes e Walber José Salazar de Farias, e às minhas irmãs Itana Moraes de Farias e Inaê Moraes de Farias, que sempre me apoiaram em minhas escolhas, meus momentos de conquistas e derrotas - tão importantes para aquilo que hoje sou - além de serem minha principal fonte de inspiração para tudo faço.

Ao meu orientador José Luis Teruel Carretero, por ter topado esse desafio e de forma sempre simpática e atenciosa, me corrigir e aconselhar com este trabalho e no que mais estivesse ao seu alcance. Sou muito grato por sua disponibilidade e paciência.

Aos membros da banca examinadora, Tarcísio Castro Silva e Álvaro Krüger Ramos, que dedicaram seu tempo para me ajudar a melhorar este trabalho.

A todos os professores que tive, que em sua bela e generosa profissão me instruíram como matemático e como cidadão que eu sou. Agradeço em especial ao professor Célius Antônio Magalhães, com quem eu tive o imenso prazer de aprender como seu aluno e monitor, a ti toda a minha admiração.

Aos meus amigos e colegas que me apoiaram dentro e fora da academia, nos momentos de felicidade e principalmente nos momentos em que foi difícil continuar. Agradeço a todos que de alguma forma direta ou indiretamente contribuíram com a minha evolução até aqui.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro concedido durante o mestrado.

*À minha família,  
em especial à minha mãe.*



*"Compreender as coisas que nos rodeiam  
é a melhor preparação para compreender o que há mais além."  
Hipátia*



# Resumo

Nesta dissertação apresentaremos o espaço-tempo de Lorentz-Minkowski tridimensional, que será o espaço ambiente do problema a ser estudado, bem como algumas de suas propriedades geométricas. A partir daí, baseado no trabalho de Alías-Chaves-Mira [2], mostraremos uma solução analítica e paramétrica para o Problema de Björling para superfícies máximas e também alguns exemplos interessantes.

**Palavras-chave:** espaço-tempo tridimensional de Lorentz-Minkowski, superfícies máximas, problema de Björling.

# Abstract

In this dissertation we will exhibit the tridimensional Lorentz-Minkowski's spacetime, which will be the ambient space for the problem we will be studying, as well as some of its geometrical properties. From there, based on the work of Alias-Chaves-Mira [\[2\]](#), we will show an analytical and parametric solution to the Björling Problem on maximal surfaces as well as some interesting examples.

**Keywords:** Lorentz-Minkowski's tridimensional spacetime, maximal surfaces, Björling problem.

# Lista de símbolos

$b _W$	Aplicação $b$ restrita a valores de $W$ .
$V(\mathbb{F})$	Espaço vetorial $V$ sobre o corpo $\mathbb{F}$ .
$V^*$	Espaço dual de $V$ .
$V^{\mathbb{C}}$	Complexificação do espaço vetorial $V(\mathbb{R})$ .
$W < V$	$W$ é subespaço vetorial de $V$ .
$\text{span}\{A\}$	Espaço vetorial gerado pelo conjunto de vetores $A$ .
$\dim(V)$	Dimensão de $V$ .
$W^{\perp}$	Complemento ortogonal de $W$ .
$[v]^{\mathcal{F}}$	Vetor $v$ com coordenadas dadas na base $\mathcal{F}$ .
$ v $	Norma de $v$ .
$\mathcal{C}$	Cone de luz.
$\mathbb{S}_1^2$	Espaço de De Sitter.
$\mathbb{H}^2$	Plano hiperbólico.
$\mathcal{L}(V_1, V_2)$	Conjunto das transformações lineares de $V_1$ a $V_2$ .
$\text{tr}(T)$	Traço do operador linear $T$ .
$T_p M$	Plano tangente à variedade $M$ no ponto $p$ .
$\mathcal{C}^1(\Omega)$	Conjunto das funções diferenciáveis em $\Omega$ .
$\mathcal{H}(\Omega)$	Conjunto das funções complexas holomorfas em $\Omega$ .
$f_x$	Derivada parcial de $f$ em relação à $x$ .
$\text{grad}(f)(p)$	Gradiente da função $f$ no ponto $p$ .
$\text{div}(V)$	Divergente do vetor $V$ .
$\Delta\chi$	Laplaciano de $\chi$ .

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>4</b>
2.1	Breve Revisão de Álgebra Linear . . . . .	4
2.2	O Espaço $\mathbb{L}^3$ . . . . .	6
2.3	Variedades Diferenciáveis . . . . .	12
2.4	1ª.f.f., Aplicação de Gauss e Curvatura média . . . . .	18
2.5	Parametrização Complexa . . . . .	21
<b>3</b>	<b>O Problema de Björling</b>	<b>29</b>
3.1	A Representação de Björling . . . . .	29
3.2	Princípios de simetria para superfícies máximas . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Exemplos</b>	<b>46</b>
4.1	Curva plana tipo-espaço . . . . .	46
4.2	Catenóide Hiperbólico . . . . .	48
4.3	Catenóide elíptico . . . . .	50
4.4	O referencial canônico nulo . . . . .	51
4.5	Catenóide Parabólico . . . . .	54
4.6	Helicóide do primeiro tipo . . . . .	57
4.7	Helicóide do segundo tipo . . . . .	59
4.8	Superfície Regrada de Cayley . . . . .	61
	<b>Apêndice - Superfícies Máximas como pontos críticos do funcional área</b>	<b>63</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$  são aquelas superfícies com a propriedade de que sua curvatura média é identicamente nula ([5], p. 234). A importância do estudo de hipersuperfícies mínimas para a geometria é bastante conhecida devido ao fato de serem pontos críticos do funcional área, porém o interesse não se limita apenas ao âmbito matemático, tendo em vista que hipersuperfícies mínimas são um caso particular de hipersuperfícies de curvatura média constante, que surgem no estudo de diversos ramos da geometria, em particular no contexto da Relatividade Geral (ver [16] que tem tais superfícies como ponto chave do trabalho).

Quando saímos do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  e olhamos para o espaço-tempo de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^3 = (\mathbb{R}^3, dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2)$ , redefinimos o conceito de curvatura média e encontramos um caso análogo às superfícies mínimas - as superfícies máximas - nomes estes dados em função do tipo de ponto crítico que os primeiros exemplos encontrados se enquadravam. Além disso, assim como no caso Euclidiano, superfícies máximas admitem uma representação de Enneper-Weierstrass que podem ser encontradas com detalhes em [11, 14].

O problema de Björling foi proposto originalmente em 1844 [4] pelo matemático homônimo e consistia em construir uma superfície mínima em  $\mathbb{R}^3$  a partir de uma faixa analítica prescrita e em 1890, H. A. Schwarz publicou em [19] a primeira solução para este problema dada de forma explícita. O problema original pode ser encontrado em inglês em trabalhos mais recentes como [9, 13].

Como o espaço  $\mathbb{L}^3$  tem vetores com diferentes caracteres causais, seus subespaços possuem diferentes estruturas causais, de modo que o problema de Björling pode ser estudado, por exemplo, para superfícies tipo-tempo em  $\mathbb{L}^3$  como feito em [7]. O nosso estudo porém, está relacionado com superfícies máximas que são, por definição, superfícies tipo-espaço, isto é, superfícies cuja métrica induzida pelo espaço ambiente  $\mathbb{L}^3$  é Riemanniana.

Dividimos então este trabalho em três partes:

- **Preliminares:** Este capítulo é dedicado à introdução do espaço  $\mathbb{L}^3$  que será o espaço ambiente de nosso estudo. Aqui definiremos o caráter causal de um vetor em  $\mathbb{L}^3$ , que nos permitirá distinguir vetores tipo-espaço, tipo-tempo e tipo luz, nomenclatura esta herdada da física, pois um vetor tipo-tempo pode ser entendido como a maneira como um observador percebe a evolução temporal e vetores tipo-espaço descrevem posições, tudo isso de acordo com algum referencial inercial específico. Vetores tipo-luz são assim chamados pois representam eventos que descrevem partículas sem massa no espaço-tempo (em particular os fótons e portanto a luz). Daremos em seguida uma interpretação geométrica para tais vetores, bem como descrever os subespaços por eles gerados. Em seguida, adaptaremos as definições de produto vetorial, a primeira forma fundamental de uma superfície, a aplicação Normal de Gauss e Curvatura média para o  $\mathbb{L}^3$ , definições estas que serão necessárias para reescrever e solucionar o problema de Björling neste novo espaço. Concluiremos as preliminares explicando a parametrização complexa com base em [10] e a representação de Enneper-Weierstrass, ambas necessárias para a descrição local das superfícies máximas estudadas.
- **O Problema de Björling para superfícies máximas em  $\mathbb{L}^3$ :** Começaremos apresentando alguns resultados da análise complexa que serão úteis para a solução do problema de Björling, bem como para alguns resultados de simetria que discutiremos ao final do capítulo. Em seguida trataremos da representação de Björling para superfícies máximas em  $\mathbb{L}^3$  e enunciaremos o problema que dá nome à este trabalho, apresentando uma solução analítica para o mesmo, dadas as condições de contorno - uma curva tipo-espaço e um campo de vetores tipo-tempo unitário e ortogonal à curva dada. Por fim, demonstraremos a existência e unicidade da solução do problema de Björling e discorreremos sobre algumas simetrias interessantes para as superfícies que solucionam o problema.
- **Exemplos:** Com as ferramentas adquiridas nos capítulos anteriores, exibiremos alguns exemplos, explicitando os cálculos feitos e ilustrando as superfícies obtidas.
- **Apêndice:** Inspirados em [5], mostraremos que as superfícies máximas no espaço  $\mathbb{L}^3$  representam pontos críticos do funcional área. Serão feitas apenas algumas adaptações para o novo espaço ambiente como a própria definição de curvatura média e a primeira forma fundamental, mas o passo a passo da demonstração será o mesmo.

# Capítulo 2

## Preliminares

### 2.1 Breve Revisão de Álgebra Linear

Nesta seção faremos um breve apanhado de alguns conceitos da álgebra linear que serão fundamentais para compreender o espaço de Lorentz  $\mathbb{L}^3$  como um espaço vetorial e o produto escalar que usaremos.

**Definição 2.1.1** *Uma forma bilinear simétrica  $b$  em um espaço vetorial  $V$  sobre o corpo dos números reais  $\mathbb{R}$  (denotamos  $V(\mathbb{R})$  ou simplesmente  $V$ , e o corpo dos reais estará implícito daqui em diante) é uma aplicação:*

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

*com as seguintes propriedades:*

- (i)  $b(u, v) = b(v, u)$ ,  $\forall u, v \in V$ ,
- (ii)  $b(u + v, w) = b(u, w) + b(v, w)$ ,  $\forall u, v, w \in V$ ,
- (iii)  $b(\beta u, v) = \beta b(u, v)$ ,  $\forall \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\forall u, v \in V$ .

**Definição 2.1.2** *Seja  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear simétrica. Dizemos que  $b$  é:*

- (i) *positiva definida (resp. negativa definida) se  $b(v, v) > 0$  (resp.  $b(v, v) < 0$ ) para todo  $v$  não nulo em  $V$ ,*
- (ii) *positiva semidefinida (resp. negativa semidefinida) se  $b(v, v) \geq 0$  (resp.  $b(v, v) \leq 0$ ) para todo  $v$  não nulo em  $V$ ,*
- (iii) *indefinida, se não é positiva semidefinida nem negativa semidefinida,*

(iv) não degenerada se a condição  $b(v, w) = 0, \forall w \in V$  implicar  $v = 0$ .

**Definição 2.1.3** O índice  $\nu$  de uma forma bilinear simétrica  $b$  em  $V$  é o maior inteiro tal que  $\nu = \dim(W)$ , onde  $W < V$  é um subespaço vetorial de  $V$  e a restrição de  $b$  a elementos de  $W$  denotada por  $b|_W$  é negativa definida.

**Definição 2.1.4** Um produto escalar  $g$  em  $V$  é uma forma bilinear simétrica não degenerada.

A seguir, alguns exemplos de produto escalar.

**Exemplo 2.1.1** O produto escalar usual de  $\mathbb{R}^3$  é dado por:

$$g(u, v) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3,$$

onde  $u = (u^1, u^2, u^3)$  e  $v = (v^1, v^2, v^3)$ . Este é um exemplo de um produto escalar positivo definido.

**Exemplo 2.1.2** O produto escalar em  $\mathbb{R}^2$  dado por:

$$g(u, v) = u^1 v^2 + u^2 v^1,$$

onde  $u = (u^1, u^2)$  e  $v = (v^1, v^2)$  é um exemplo de um produto escalar indefinido.

Veja que se  $w = (w^1, w^2)$  é um vetor contido em um quadrante par,  $g(w, w) = 2w^1 w^2 < 0$  e portanto  $W = \text{span}\{w\}$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^2$  cuja dimensão é 1 e  $g|_W$  é negativo definido, portanto temos que esse produto escalar  $g$  tem índice maior ou igual a 1. Para ver que vale a igualdade, observe que o único subespaço de dimensão 2 é o próprio  $\mathbb{R}^2$  e o vetor  $(1, 1)$  é tal que  $g((1, 1), (1, 1)) = 2 > 0$ .

**Definição 2.1.5** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais. Definimos então a complexificação de  $V$  como:

$$V^{\mathbb{C}} = \{u + iv \mid u, v \in V\},$$

onde  $i$  é a unidade imaginária e  $V^{\mathbb{C}} = V^{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$  é um espaço vetorial sobre o corpo dos números complexos cujas operações são definidas por:

$$\begin{aligned} (u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2) &= (u_1 + u_2) + i(v_1 + v_2), & \forall u_1, v_1, u_2, v_2 \in V \\ (\alpha + i\beta) \cdot (u + iv) &= (\alpha u - \beta v) + i(\alpha v + \beta u), & \forall u, v \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



## 2.2 O Espaço $\mathbb{L}^3$

Para compreendermos a solução para o problema de Bjorling em  $\mathbb{L}^3$ , antes é necessário estar confortável com alguns conceitos básicos da geometria lorentziana, bem como adaptar conceitos importantes da geometria de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  - como a 1ª forma fundamental, aplicação normal de Gauss e curvatura média - ao nosso espaço-tempo em questão. Além disso, veremos em detalhe a parametrização complexa para uma superfície, que será a notação utilizada ao longo desta dissertação.

**Definição 2.2.1** *O produto escalar usual de índice  $\nu$  no  $\mathbb{R}^n$  é definido como sendo a forma bilinear simétrica não degenerada  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu$  com a seguinte lei de formação:*

$$\langle u, v \rangle_\nu = \sum_{i=1}^{n-\nu} u^i v^i - \sum_{i=n-\nu+1}^n u^i v^i,$$

onde  $u = \sum_{i=1}^n u^i e_i$ ,  $v = \sum_{j=1}^n v^j e_j \in \mathbb{R}^n$ ,  $\{e_k\}_{k=1}^n$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^n$  e  $u^i$ ,  $v^j$  são os coeficientes de  $u$  e  $v$  nessa base.

**Definição 2.2.2** *No caso em que  $\nu = 1$ , dizemos que o produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  é lorentziano.*

Assim, estamos prontos para compreender o  $\mathbb{L}^3$ , que será o nosso ambiente de trabalho.

**Definição 2.2.3** *O par  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  é o produto escalar lorentziano usual de  $\mathbb{R}^3$  é o que chamamos de espaço-tempo de Lorentz-Minkowski tridimensional (que daqui em diante será referido por Espaço Lorentziano) denotado por  $\mathbb{L}^3$ .*

Veja que o nosso produto escalar lorentziano  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  em  $\mathbb{R}^3$  é descrito por

$$\langle u, v \rangle_1 = u^1 v^1 + u^2 v^2 - u^3 v^3$$

e este não é positivo definido como o produto escalar euclidiano. De fato, calculemos as formas quadráticas de  $e_1$ ,  $e_3$  e  $e_1 + e_3$ :

$$\begin{aligned} \langle e_1, e_1 \rangle_1 &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 > 0 \\ \langle e_3, e_3 \rangle_1 &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 < 0 \\ \langle e_1 + e_3, e_1 + e_3 \rangle_1 &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Assim, sendo o vetor  $v \in \mathbb{L}^3$ , sua forma quadrática associada  $\langle v, v \rangle_1 \in \mathbb{R}$  pode assumir valores positivos, negativos e zero. Então, dependendo do sinal de  $\langle v, v \rangle_1$ , atribuiremos a  $v$  um certo caráter causal:

**Definição 2.2.4** *Seja  $v \in \mathbb{L}^3$ , diremos que  $v$  é um vetor:*

- (i) *tipo-tempo, se  $\langle v, v \rangle_1 < 0$ ,*
- (ii) *tipo-luz, se  $\langle v, v \rangle_1 = 0$ , mas  $v \neq 0$  ou*
- (iii) *tipo-espaço, se  $\langle v, v \rangle_1 > 0$ , ou se  $v = 0$ .*

**Observação 2.2.5** *Não há uma unanimidade quanto ao caráter causal do vetor  $0 \in \mathbb{L}^3$  na literatura. A escolha aqui feita foi de modo a simplificar futuras definições.*

**Observação 2.2.6** *Chamaremos de vetor nulo todo  $v$  tal que  $\langle v, v \rangle_1 = 0$ , ou seja, os vetores nulos são os vetores tipo luz e o vetor zero.*

Podemos visualizar os vetores nulos como sendo os pontos sobre a superfície cônica  $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ , chamado de cone de luz. Na Figura 2.1 temos uma representação do espaço  $\mathbb{L}^3$ : um espaço tridimensional com o cone de luz em destaque.

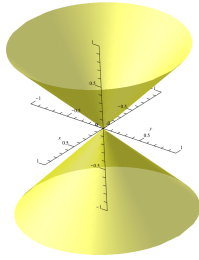


Figura 2.1: O cone de luz.

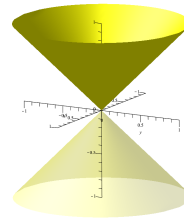


Figura 2.2: O cone de luz em direção ao futuro.

Geometricamente, os vetores tipo-tempo são aqueles que estão na parte interna ao cone de luz (Figura 2.3), os vetores tipo-luz são aqueles que estão sobre o cone (Figura 2.5) e os vetores tipo-espaço estão na parte externa ao cone (Figura 2.4).

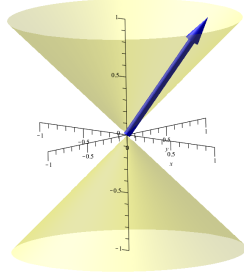


Figura 2.3: Vetor tipo-tempo.

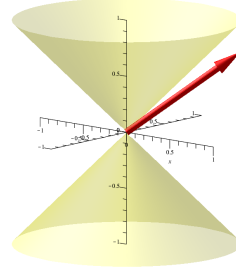


Figura 2.4: Vetor tipo-espaço.

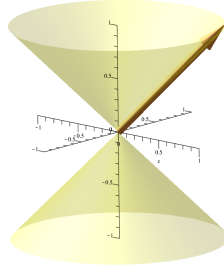


Figura 2.5: Vetor tipo-luz.

Podemos definir a orientação temporal de um vetor tipo-tempo conforme a seguir:

**Definição 2.2.7** Um vetor tipo-tempo  $v$  é dito orientado para o futuro, se  $\langle v, e_3 \rangle_1 < 0$ . Geometricamente, os vetores orientados para o futuro são todos os vetores contidos no interior do cone de luz em direção ao futuro.<sup>1</sup>

Veja que o espaço de Lorentz  $\mathbb{L}^3$  herda a estrutura de espaço vetorial do próprio  $\mathbb{R}^3$ . Queremos então estender a ideia de caráter causal para subespaços vetoriais de  $\mathbb{L}^3$ :

**Definição 2.2.8** Seja  $W$  um subespaço vetorial de  $\mathbb{L}^3$ , diremos que  $W$  é

- (i) tipo-tempo, se contém ao menos um vetor tipo-tempo,
- (ii) tipo-luz, se contém um vetor tipo-luz, mas não contém nenhum tipo-tempo ou
- (iii) tipo-espaço, se todos os vetores de  $W$  são tipo-espaço.

---

<sup>1</sup>De forma semelhante, ao restringimos o cone de luz a valores positivos de  $z$  temos o cone de luz em direção ao futuro (Figura 2.2)

Veja que para os subespaços de dimensão zero e dimensão 3 só há uma possibilidade cada ( $\{0\}$  que é tipo-espaço e o  $\mathbb{L}^3$  que é tipo-tempo, respectivamente). Se  $\dim(W) = 1$ , um vetor que gere o subespaço  $W$  vai ditar o caráter causal de  $W$ , resta então analisarmos o caso de duas dimensões e ver que sempre cairemos em um dos casos acima citados.

Se  $W$  possui um vetor tipo tempo, caímos no caso (i). Caso ele não tenha um vetor tipo tempo, de duas uma, ou ele possui um vetor tipo luz (caso (ii)) ou não (caso (iii)). A interpretação geométrica destes planos está relacionada com a sua posição em relação ao cone de luz.

Denotando por  $\Pi$  um plano em  $\mathbb{L}^3$ , temos que: se  $\Pi$  secciona o cone de luz, então  $\Pi$  é um plano tipo-tempo (Figura 2.6);

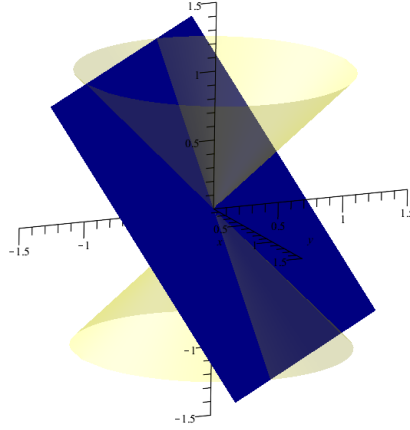


Figura 2.6: Exemplo de plano tipo-tempo.

se  $\Pi \subset \mathbb{L}^3$  é tal que  $\Pi \cap \mathcal{C} = \{0\}$ , então  $\Pi$  é um plano tipo-espaço (Figura 2.7);

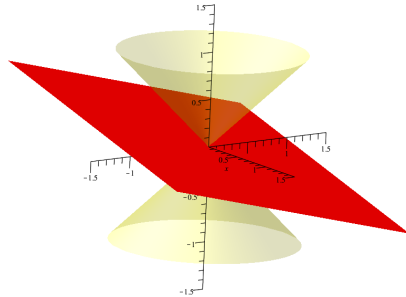


Figura 2.7: Exemplo de plano tipo-espaço.

por fim,  $\Pi$  é um plano tipo luz se ele tangencia o cone  $\mathcal{C}$  (Figura 2.8).

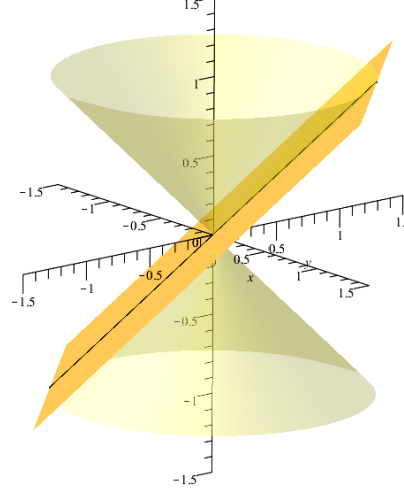


Figura 2.8: Exemplo de plano tipo-luz.

Podemos também traçar um paralelo com o espaço Euclidiano no que se refere à ortogonalidade<sup>2</sup>:

**Definição 2.2.9** Dizemos que dois vetores  $u, v \in \mathbb{L}^3$  são ortogonais se  $\langle u, v \rangle_1 = 0$ .

**Definição 2.2.10** O complemento ortogonal de  $W < \mathbb{L}^3$ , denotado por  $W^\perp$  também é definido de maneira análoga ao caso Euclidiano:

$$W^\perp = \{v \in \mathbb{L}^3 \mid \langle v, w \rangle_1 = 0, \forall w \in W\}.$$

**Definição 2.2.11** A norma de  $v \in \mathbb{L}^3$ , denotada por  $|v|$  é dada por:

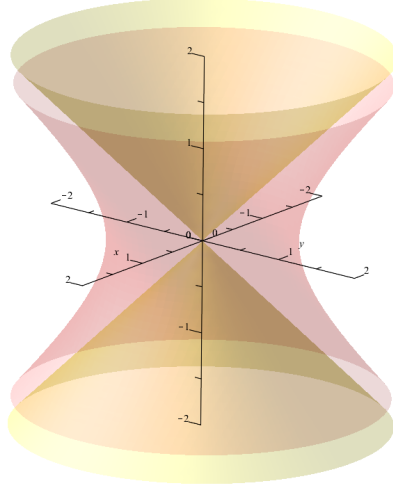
$$|v| = \sqrt{|\langle v, v \rangle_1|} \quad (2.1)$$

Assim, dizemos que um vetor  $v \in \mathbb{L}^3$  é unitário se  $|v| = 1$ . Dentre os vetores unitários, temos aqueles que são tipo-tempo e os que são tipo-espaço.

O conjunto de vetores unitários tipo-espaço é também conhecido como o Espaço de De Sitter  $\mathbb{S}_1^2$  (Figura 2.9):

$$\{v \in \mathbb{L}^3 \mid \langle v, v \rangle_1 = 1\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\} = \mathbb{S}_1^2.$$

<sup>2</sup>As definições a seguir podem ser encontradas em [17], p. 48-49

Figura 2.9: Espaço de De Sitter  $\mathbb{S}_1^2$ .

O conjunto de vetores unitários tipo-tempo (Figura 2.10) é o hiperbolóide de duas folhas dado por:

$$\{v \in \mathbb{L}^3 \mid \langle v, v \rangle_1 = -1\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1\}.$$

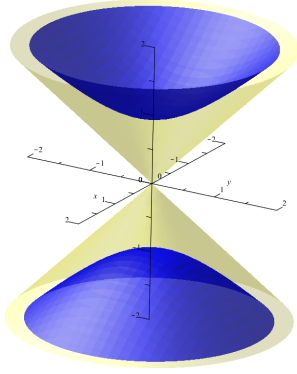


Figura 2.10: Vetores unitários tipo-tempo.

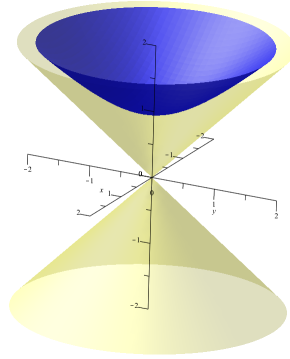


Figura 2.11: O plano hiperbólico.

O plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2 = \{v \in \mathbb{L}^3 \mid \langle v, v \rangle_1 = -1, \langle v, e_3 \rangle_1 < 0\}$  é o conjunto de vetores unitários tipo-tempo, que estão orientados para o futuro (Figura 2.11):

Agora que estamos munidos de algumas propriedades da geometria Lorentziana, podemos estudar superfícies em  $\mathbb{L}^3$ , seguida do caráter causal das mesmas.

## 2.3 Variedades Diferenciáveis

Apontaremos nesta seção um apanhado de definições retiradas de [6] e [17] sobre a geometria Riemanniana e semi-Riemanniana. Com isso, poderemos estudar o conceito geométrico de superfície no espaço de Lorentz  $\mathbb{L}^3$  e em particular, superfícies máximas que são essenciais para o nosso trabalho.

**Definição 2.3.1** *Uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  é um conjunto  $M$  (escrevemos também  $M^n$ ) e uma família de subconjuntos  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in F}$  satisfazendo as seguintes propriedades:*

$$(i) \quad M = \bigcup_{\alpha \in F} V_\alpha,$$

(ii) *Para cada  $\alpha \in F$ , existe uma aplicação biunívoca*

$$x_\alpha : V_\alpha \subset M \rightarrow x_\alpha(V_\alpha) \subset \mathbb{R}^n,$$

*tal que  $x_\alpha(V_\alpha)$  é um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ , e*

(iii) *Para qualquer par  $\alpha, \beta \in F$  tal que  $V_\alpha \cap V_\beta$  não seja vazio, tem-se que  $x_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta)$  e  $x_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)$  são conjuntos abertos de  $\mathbb{R}^n$  e a aplicação*

$$x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow x_\beta(V_\alpha \cap V_\beta) \subset \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

*é um difeomorfismo cuja inversa é dada por  $x_\alpha \circ x_\beta^{-1}$ .*

*Para cada  $\alpha$ , a aplicação  $x_\alpha$  é chamada de carta local e*

$$x_\alpha^{-1} : x_\alpha(V_\alpha) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V_\alpha \subset M$$

*é dito um sistema de coordenadas locais (ou parametrização local). O termo "local" será omitido daqui em diante, embora todo estudo que faremos será local. Além disso, as aplicações (2.2) definidas em interseções de duas cartas são chamadas de mudança de coordenadas.*

**Definição 2.3.2** *Uma família  $\{(V_\alpha, x_\alpha) \mid \alpha \in F\}$  é dita um atlas.*

Sem perda de generalidade, podemos assumir que os atlas serão maximais, isto é, quaisquer outras cartas satisfazendo (ii) e (iii) estão inclusas no atlas em questão. Desta forma, um atlas maximal é também chamado uma estrutura diferenciável em  $M$ .

A seguinte observação é retirada de [6] p. 4, adaptada para a notação que utilizaremos aqui.

**Observação 2.3.3** *Uma estrutura diferenciável em um conjunto  $M$  induz de uma maneira natural uma topologia em  $M$ . Basta definir que  $A \subset M$  é um aberto de  $M$  se  $x_\alpha(A \cap V_\alpha)$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$  para todo  $\alpha$ . É imediato verificar que  $M$  e o vazio são abertos, que a união de abertos é aberto e que a intersecção finita de abertos é aberto. Observe que a topologia é definida de tal modo que os conjuntos  $V_\alpha$  são abertos e as aplicações  $x_\alpha$  são contínuas.*

**Exemplo 2.3.1** *O conjunto  $\mathbb{C} = \{s + it \mid s, t \in \mathbb{R}\}$  dos números complexos é uma variedade diferenciável de dimensão 2. Podemos utilizar uma única carta:*

$$\begin{aligned} x : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s + it &\mapsto (s, t) \end{aligned}$$

Para cada ponto  $p \in M$ , estaremos interessados em definir vetores tangentes a  $M$  em  $p$ . Para isso, precisaremos de alguns conceitos.

**Definição 2.3.4** *Sejam  $M_1^n$  e  $M_2^m$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  é diferenciável em  $p \in M_1$  se dada uma carta*

$$y : V \subset M_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$$

*em uma vizinhança  $V$  de  $\varphi(p)$ , existe uma carta*

$$x : U \subset M_1 \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

*onde  $U$  é uma vizinhança de  $p$  tal que  $\varphi(U) \subset V$  e a aplicação*

$$y \circ \varphi \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

*é diferenciável em  $x(p)$ .*

Considere agora o caso especial de uma função real  $f$  sobre uma variedade  $M$  de dimensão  $n$ . Se  $x : V \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma carta local, então a composição  $f \circ x^{-1} : x(V) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de expressão coordenada de  $f$  em termos da carta  $x$ . Para simplificar a notação, daqui em diante poderemos escrever  $f \circ x^{-1} \equiv f$ .

**Definição 2.3.5** *Diremos que a aplicação  $f$  como acima é suave em um ponto  $p \in M$ , se a expressão coordenada de  $f$  em termos de qualquer carta local em  $p$  for sempre uma função de classe  $C^\infty$ . A aplicação  $f$  será dita suave em  $M$  se for suave para todo  $p \in M$ .*



**Definição 2.3.6** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  é chamada uma curva (diferenciável) em  $M$ , onde  $\varepsilon > 0$ .*

**Definição 2.3.7** *Um vetor tangente a  $M$  em  $p$  é uma classe de equivalência de curvas diferenciáveis  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  com  $c(0) = p$  e  $\varepsilon > 0$ , onde  $c$  e  $c^*$  estão na mesma classe de equivalência ( $c \sim c^*$ ) se, e somente se,  $(x \circ c)'(0) = (x \circ c^*)'(0)$  para toda carta  $x$  contendo  $p$ .*

**Definição 2.3.8** *Definimos então o espaço tangente à variedade diferenciável  $M^n$  no ponto  $p$  como o conjunto de todos os vetores tangentes a  $M$  em  $p$  e denotamos o mesmo por  $T_p M$ . Além disso, pode-se mostrar que  $T_p M$  possui uma estrutura de espaço vetorial real de dimensão  $n$ .*

**Observação 2.3.9** *Denotamos por  $\{\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p\}$  a base de  $T_p M$  associada à carta  $x^3$ .*

**Notação:** *As seguintes notações serão equivalentes e serão adotadas no intuito de simplificar os cálculos:*

$$\partial_j|_p = \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p = \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j},$$

onde o ponto  $p$  estará claro pelo contexto.

O espaço dual  $(T_p M)^*$  de  $T_p M$  é o conjunto das transformações lineares de  $T_p M$  em  $\mathbb{R}$  (denotamos  $\mathcal{L}(T_p M, \mathbb{R}) = (T_p M)^*$ ). E definimos a base dual associada  $\{dx_1|_p, \dots, dx_n|_p\}$  de modo que

$$dx_i(\partial_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

**Observação 2.3.10** *Novamente o subíndice  $p$  em  $dx_j|_p$  poderá ser omitido, estando claro pelo contexto.*

Para a próxima definição, vamos lembrar que um produto escalar é um caso especial de uma forma bilinear simétrica. Então será útil descrever o conjunto  $\mathcal{L}(T_p M \times T_p M, \mathbb{R})$  das formas bilineares simétricas sobre  $T_p M$  na base  $\{dx_i \otimes dx_j\}$ ,  $i, j = \{1, \dots, n\}$ , onde temos que em todo  $p \in M$ :

$$(dx_i \otimes dx_j)(\partial_k, \partial_l) = dx_i(\partial_k)dx_j(\partial_l) = \delta_{ik}\delta_{jl} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k \text{ e } j = l, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

---

<sup>3</sup>Para mais detalhes desta notação, ver [6], p. 7-9.

**Definição 2.3.11** Uma métrica  $g$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p \in M$ , um produto escalar  $g_p$  (ver Definição 2.1.4):

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

com índice constante. Assim, como

$$g_p \in \{b \in \mathcal{L}(T_p M \times T_p M, \mathbb{R}) \mid b \text{ é simétrica e não degenerada}\},$$

então podemos escrever

$$g_p = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(p) dx_i \otimes dx_j$$

e chamaremos de  $g_{ij}(p) = g_p(\partial_i, \partial_j)$  os coeficientes de  $g$  na base  $\{dx_i \otimes dx_j\}$ ,  $i, j = \{1, \dots, n\}$ . Exigiremos também que em toda carta local, os  $g_{ij}$ 's sejam funções diferenciáveis. Observe que a condição de simetria implica em  $g_{ij}(p) = g_{ji}(p)$ ,  $\forall p \in M, \forall i, j = 1, \dots, n$ .

**Notação:** Denotaremos por  $g^{ij}$  a matriz inversa de  $g_{ij}$ .

**Definição 2.3.12** Uma variedade semi-Riemanniana é uma variedade diferenciável  $M$  munida de uma métrica.

**Definição 2.3.13** Uma métrica Riemanniana  $g$  sobre  $M$  é uma métrica de índice 0, ou seja,  $g$  é positiva definida.

**Definição 2.3.14** Um variedade Riemanniana é uma variedade diferenciável  $M$  munida de uma métrica Riemanniana  $g$ .

A seguir, definiremos alguns operadores diferenciáveis sobre variedades. Faremos isso exclusivamente em razão do operador laplaciano, que será utilizado ao longo do texto.<sup>4</sup>

**Definição 2.3.15** Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação suave, definimos o vetor gradiente de  $f$  em  $p$ ,  $\text{grad}(f)(p) \in T_p M$  por:

$$\text{grad}(f)(p) = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial_j(p).$$

---

<sup>4</sup>Essas definições podem ser encontradas com mais detalhes em [17].

**Definição 2.3.16** *Seja  $V = \sum_i V^i \partial_i \in T_p M$ , definimos o divergente de  $V$  como o escalar:*

$$\operatorname{div}(V) = \sum_i \left\{ \frac{\partial V^i}{\partial x_i} + \sum_j \Gamma_{ij}^i V^j \right\},$$

onde  $\Gamma_{ij}^k$  são os símbolos de Christoffel dados por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left\{ \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right\}.$$

**Definição 2.3.17** *O laplaciano de uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é definido por:*

$$\Delta f = \sum_{i,j} g^{ij} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right\}. \quad (2.3)$$

Vamos agora definir o produto vetorial no  $\mathbb{L}^3$ . A nossa motivação aqui é, como no caso Euclideano, encontrar um vetor que seja ortogonal aos dois vetores que inserimos no produto.

**Definição 2.3.18** *Sejam  $u, v \in \mathbb{L}^3$ , o vetor  $u \wedge v \in \mathbb{L}^3$  é definido por:*

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & -\hat{k} \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} = (u^2 v^3 - u^3 v^2, u^3 v^1 - u^1 v^3, -u^1 v^2 + u^2 v^1) \quad (2.4)$$

onde  $u = (u^1, u^2, u^3)$  e  $v = (v^1, v^2, v^3)$ .

Assim, é fácil verificar que a seguinte relação é satisfeita:

$$\langle u \wedge v, w \rangle_1 = \det(u, v, w), \forall u, v, w \in \mathbb{L}^3$$

De fato, se  $w = (w^1, w^2, w^3)$ , temos:

$$\begin{aligned} \langle u \wedge v, w \rangle_1 &= (u^2 v^3 - u^3 v^2) w^1 + (u^3 v^1 - u^1 v^3) w^2 - (-u^1 v^2 + u^2 v^1) w^3 \\ &= w^1 \begin{vmatrix} u^2 & u^3 \\ v^2 & v^3 \end{vmatrix} + w^2 \begin{vmatrix} u^3 & u^1 \\ v^3 & v^1 \end{vmatrix} + w^3 \begin{vmatrix} u^1 & u^2 \\ v^1 & v^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix} \\ &= \det(u, v, w). \end{aligned}$$

Desta forma, teremos  $\langle u, u \wedge v \rangle_1 = 0 = \langle v, u \wedge v \rangle_1$ , como queríamos.

**Definição 2.3.19** *Seja  $\Sigma$  uma variedade diferenciável conexa de dimensão 2 com atlas  $(V_\alpha, x_\alpha)_{\alpha \in F}$ . Uma aplicação  $\chi : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  de classe  $C^2$  é dita uma imersão se para todo  $x_\alpha : V_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(\chi_s \wedge \chi_t)(s, t) \neq 0$ , onde  $x_\alpha(p) = (s, t)$ . Aqui utilizamos a notação:*

$$\begin{aligned}\chi_s &= \partial_s \chi = \partial_s(\chi \circ x_\alpha^{-1}), \\ \chi_t &= \partial_t \chi = \partial_t(\chi \circ x_\alpha^{-1}).\end{aligned}$$

**Observação 2.3.20** *Também são equivalentes as seguintes notações:*

$$\frac{\partial \chi}{\partial s} \equiv \chi_s, \quad \frac{\partial \chi}{\partial t} \equiv \chi_t.$$

**Observação 2.3.21** *No que segue, usaremos o símbolo  $\Sigma$  para representar uma variedade bidimensional conexa.*

**Definição 2.3.22** *Dizemos que  $\chi : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  é uma superfície se a aplicação  $\chi$  é uma imersão.*

**Observação 2.3.23** *O fato de  $d_p \chi$  ser uma transformação linear injetiva (afinal  $\chi$  é imersão), nos dá que há uma bijeção natural entre  $T_p \Sigma$  e  $d_p \chi(T_p \Sigma)$ , permitindo que façamos a identificação  $v \leftrightarrow d_p \chi(v)$  - elementos de  $T_p \Sigma$  e  $d_p \chi(T_p \Sigma)$  respectivamente - tal notação poderá ser admitida adiante.*

Tomaremos então a métrica do pullback  $\chi^*((\langle \cdot, \cdot \rangle_1)_p)$  em  $p \in \Sigma$  por  $\chi$  definida por:

$$\chi^*((\langle \cdot, \cdot \rangle_1)_p)(u, v) = \langle d_p \chi(u), d_p \chi(v) \rangle_1, \quad u, v \in T_p \Sigma, \quad \forall p \in \Sigma$$

e assim,  $\chi : (\Sigma, \chi^*((\langle \cdot, \cdot \rangle_1)_p)) \rightarrow \mathbb{L}^3$  é uma imersão isométrica. A métrica  $\chi^*((\langle \cdot, \cdot \rangle_1)_p)$  também é chamada de métrica induzida por  $\mathbb{L}^3$  sobre  $\Sigma$  e pode ser positiva definida (métrica Riemanniana), pode ter índice 1 (métrica Lorentziana) ou ser degenerada.

**Definição 2.3.24** *Dizemos que uma superfície  $\chi : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  é tipo-espaço, se a métrica induzida por  $\mathbb{L}^3$  sobre  $\Sigma$  é Riemanniana, isto é, se  $(\Sigma, \chi^*((\langle \cdot, \cdot \rangle_1)_p))$  é uma variedade Riemanniana. Equivalentemente,  $\chi : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  é uma superfície tipo-espaço se todos os seus planos tangentes são planos tipo-espaço.*

O próximo passo é entender como será o caráter causal de um vetor normal à um plano em  $\mathbb{L}^3$ , para isso, antes será necessário enunciar um teorema importante:

**Teorema 2.3.25 (Lei da inércia de Sylvester)**<sup>5</sup> Para toda forma bilinear e simétrica  $b$ , existe uma base de Sylvester, isto é, uma base ortogonal composta só de vetores unitários e tipo luz. Além disso, o número de vetores tipo tempo (chamado o índice  $\nu$  de  $b$ ), o número de vetores tipo luz (a nulidade de  $b$ ) e o número de vetores tipo espaço de  $b$  não depende da base escolhida.

**Proposição 2.3.26** Se  $W$  for um plano tipo-espaço em  $\mathbb{L}^3$ , então  $W^\perp = \text{span}\{u\}$ , onde  $u \in \mathbb{L}^3$  é um vetor tipo tempo.

**Demonstração:** Vamos aplicar a Lei da inércia de Sylvester à nossa forma bilinear e simétrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  (que é também não-degenerada). Denotando por  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  os vetores da base canônica, sabemos que:

$$\langle e_1, e_1 \rangle_1 = 1 > 0, \quad \langle e_2, e_2 \rangle_1 = 1 > 0, \quad \langle e_3, e_3 \rangle_1 = -1 < 0$$

Dizemos então que  $\mathbb{L}^3 = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$  tem a assinatura  $(+, +, -)$ . Agora sejam  $v, w \in \mathbb{L}^3$  vetores unitários tais que  $W = \text{span}\{v, w\}$ . Sabemos que o vetor  $v \wedge w$  é ortogonal a  $v$  e a  $w$  simultaneamente e, como  $v$  e  $w$  são vetores tipo-espaço (pois geram  $W$  que é tipo-espaço) temos pela Lei da inércia de Sylvester, que o vetor  $v \wedge w / |v \wedge w|$  há de ser um vetor unitário tipo-tempo, de modo que a assinatura  $(+, +, -)$  é preservada, isto é, o número de vetores de cada caráter causal deve ser mantido - 2 vetores tipo-espaço e 1 vetor tipo-tempo - independente da base de Sylvester escolhida.

Além disso, como  $\dim(W) = 2$ , temos que  $\dim(W^\perp) = 1$ , então  $v \wedge w / |v \wedge w|$  é um vetor unitário tipo-tempo que gera  $W^\perp$ .

□

## 2.4 Primeira forma fundamental, Aplicação Normal de Gauss e Curvatura Média

**Definição 2.4.1** Seja  $\chi : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma superfície tipo-espaço, e  $(s, t)$  uma parametrização de uma vizinhança  $U$  de  $p \in \Sigma$ . Definimos a primeira forma fundamental  $I_p$  de  $\Sigma$  em  $p$  como a métrica induzida em  $\Sigma$ :

$$I_p : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R} \\ (V, W) \mapsto I_p(V, W) = \chi^*(\langle \cdot, \cdot \rangle_1)(V, W).$$

---

<sup>5</sup>Originalmente demonstrado em [20].

Podemos expressar a primeira forma fundamental na base  $\{\partial_s, \partial_t\}$  por:

$$I_p = E(s, t)ds^2 + 2F(s, t)dsdt + G(s, t)dt^2, \quad (2.5)$$

onde

$$E(s, t) = I_p(\partial_s, \partial_s)$$

$$F(s, t) = I_p(\partial_s, \partial_t)$$

$$G(s, t) = I_p(\partial_t, \partial_t)$$

são os chamados coeficientes da primeira forma fundamental nesta base. Podemos também escrever a matriz associada à  $I_p$  nesta base por:

$$I_p = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}_{\{\partial_s, \partial_t\}}.$$

**Definição 2.4.2** Seja  $\chi : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma superfície tipo-espaço e  $\zeta$  uma parametrização em uma vizinhança  $U$  de  $p \in \Sigma$

$$\zeta : \mathbb{R}^2 \supset (s, t) \mapsto \zeta(s, t) \in U.$$

Dizemos então que  $\zeta$  é uma parametrização isotérmica (ou  $s$  e  $t$  são parâmetros isotérmicos) se os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\Sigma$  são dados por:

$$E(s, t) = e^{2\rho} = G(s, t) \quad (2.6)$$

$$F(s, t) = 0, \quad (2.7)$$

onde  $\rho = \rho(s, t)$  é uma função diferenciável.

**Observação 2.4.3** Em [8] encontramos uma prova da existência de parâmetros isotérmicos em superfícies Riemannianas.

Seja agora  $\chi : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma superfície tipo-espaço e  $(s, t)$  parâmetros locais para uma vizinhança aberta  $U$  de um ponto  $p \in \Sigma$ . Podemos definir um campo de vetores normais unitários  $\xi(s, t) \in \mathbb{L}^3$  por:

$$\xi(s, t) = \frac{\chi_s \wedge \chi_t}{|\chi_s \wedge \chi_t|}(s, t), \quad (2.8)$$

que é sempre tipo-tempo, como vimos na proposição (2.3.26).

**Definição 2.4.4**  $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$  é chamada a aplicação normal de Gauss, que associa a cada ponto  $p \in \Sigma$ , um vetor unitário e normal a  $\Sigma$  em  $p$  e orientado para o futuro.

O teorema a seguir nos dá uma informação importante sobre a orientabilidade temporal de superfícies tipo-espaço, que é o análogo da definição que tínhamos para orientabilidade de uma superfície no caso Euclidiano.

**Teorema 2.4.5** *Seja  $\chi : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma superfície tipo-espaço, então  $\Sigma$  é orientável.*

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [15], p. 33.

**Definição 2.4.6** *Dado  $p \in \Sigma$ , o operador auto-adjunto  $A_p : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$  dado por:*

$$A_p(V) = -d_p N(V), \quad \forall V \in T_p\Sigma. \quad (2.9)$$

*é chamado o operador forma de  $\Sigma$  em  $\mathbb{L}^3$  no ponto  $p$ .*

**Definição 2.4.7** *De forma similar ao caso Euclidiano, define-se a curvatura média  $H : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ :*

$$H(p) = -\frac{1}{2}\text{tr}(A_p). \quad (2.10)$$

Para entendermos o porquê deste sinal negativo (que não está na definição Euclidiana da curvatura média) vamos definir o vetor curvatura média, cuja interpretação geométrica é a mesma do caso Euclidiano - um vetor na direção de  $N$ , cuja norma é dada pela curvatura média:

**Definição 2.4.8** *O vetor curvatura média  $\vec{H}$  é dado por  $\vec{H} = HN$ .*

Assim, se queremos que  $\vec{H}$  e  $N$  sejam dois vetores tipo tempo com a mesma orientação quando  $H > 0$ , temos que ter  $\langle \vec{H}, N \rangle_1 < 0$ . Assim

$$\begin{aligned} \langle \vec{H}, N \rangle_1 &< 0 \\ \Leftrightarrow \langle HN, N \rangle_1 &< 0 \\ \Leftrightarrow H \langle N, N \rangle_1 &< 0 \\ \Leftrightarrow -H &< 0 \\ \Leftrightarrow H &> 0. \end{aligned}$$

Como queríamos.

Para o problema que aqui trataremos, temos interesse em um tipo específico de superfície, definida a seguir:

**Definição 2.4.9** *Uma superfície  $\chi : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  tipo-espaço é dita uma imersão máxima se sua curvatura média  $H$  é nula em todo ponto.*

Para uma interpretação variacional desta nomenclatura, sugerimos o apêndice deste trabalho.

**Exemplo 2.4.1** *Qualquer plano tipo-espaço em  $\mathbb{L}^3$  é uma imersão máxima. De fato, seja  $\Pi = \text{span}\{w_1, w_2\}$  um plano tipo-espaço, onde  $w_1$  e  $w_2$  são vetores linearmente independentes e fixados. Temos então que:*

$$N(p) = \frac{w_1 \wedge w_2}{|w_1 \wedge w_2|} = N_0 \in \mathbb{L}^3 \text{ (constante).}$$

Assim, para todo ponto  $p$ , a diferencial  $d_p N$  na base  $\{w_1, w_2\}$  é claramente a matriz nula:

$$d_p N_{\{w_1, w_2\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então, usando (2.9) e (2.10) temos:

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{tr}(d_p N) = 0.$$

## 2.5 Parametrização Complexa

Uma ferramenta fundamental para o trabalho que aqui faremos é a análise complexa, com isso em mente, vamos introduzir a ideia de uma variável complexa em uma superfície.

Considere a complexificação do espaço tangente à superfície  $\Sigma$  em  $p$ :

$$T_p \Sigma^{\mathbb{C}} = \{X + iY \mid X, Y \in T_p \Sigma\}.$$

É fácil ver que se  $\{X, Y\}$  é uma base de  $T_p \Sigma$ , então  $\{X, iX, Y, iY\}$  é uma base de  $T_p \Sigma^{\mathbb{C}}$  como espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  e  $\{X + iY, X - iY\}$  é base de  $T_p \Sigma^{\mathbb{C}}$  sobre o corpo dos números complexos.

Em particular, dada uma parametrização  $(s, t)$  em uma vizinhança  $U$  de  $p \in \Sigma$ , se considerarmos o parâmetro complexo  $z = s + it$ , podemos definir os campos locais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial s} - i \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial s} + i \frac{\partial}{\partial t} \right), \end{aligned}$$



de modo que  $\{\partial_z, \partial_{\bar{z}}\}$  é uma base de  $T_p \Sigma^{\mathbb{C}}$ . Além disso, podemos definir as 1-formas complexas locais:

$$\begin{aligned} dz &= ds + idt \\ d\bar{z} &= ds - idt \end{aligned}$$

que é a base dual de  $\{\partial_z, \partial_{\bar{z}}\}$ . Assim, trabalharemos indistintamente com os parâmetros reais  $s$  e  $t$  ou com o parâmetro complexo  $z = s + it$ .

Seja  $\chi : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma superfície tipo-espaço. De agora em diante, levaremos em consideração apenas as parametrizações locais

$$\begin{aligned} \zeta : \Omega \subset \mathbb{C} &\rightarrow \Sigma \\ z = s + it &\mapsto \zeta(z) \end{aligned}$$

cujos parâmetros  $s$  e  $t$  são isotérmicos. Assim, substituindo (2.6) e (2.7) em (2.5), temos que a métrica Riemanniana induzida em  $\Sigma$  é dada localmente em termos destes parâmetros isotérmicos por:

$$I = e^{2\rho} \{ds^2 + dt^2\} \quad (2.11)$$

onde  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável. Além disso, como vimos no Teorema 2.4.5, a superfície  $\chi : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  é orientável, então vamos nos restringir à família de parâmetros isotérmicos que preservam a orientação temporal de  $\Sigma$ .

Observe que podemos reescrever  $I$  na base  $\{\partial_z, \partial_{\bar{z}}\}$  como

$$I = e^{2\rho} |dz|^2, \quad (2.12)$$

pois  $|dz|^2 = dzd\bar{z} = (ds + idt)(ds - idt) = ds^2 + dt^2$ .

**Definição 2.5.1** *Seja  $\chi : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma superfície de Riemann com parametrização complexa local  $z = s + it$ . O parâmetro complexo  $z$  é dito conforme desde que  $s$  e  $t$  sejam parâmetros isotérmicos para a superfície.*

**Definição 2.5.2** *Uma imersão  $\chi : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  é dita conforme, se está parametrizada por um parâmetro complexo conforme.*

A seguir, discutiremos um fato interessante sobre o laplaciano das funções coordenadas  $\chi_1, \chi_2$  e  $\chi_3$  de uma imersão máxima. Para isso, veja que se estamos usando uma parametrização  $z = s + it$  conforme, a expressão em (2.3) pode ser reescrita como:

$$\Delta \chi_k = \frac{1}{e^{2\rho}} \left( \frac{\partial^2 \chi_k}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \chi_k}{\partial t^2} \right), \quad \forall k = 1, 2, 3, \quad (2.13)$$

ou de forma mais compacta:

$$\Delta\chi = \frac{1}{e^{2\rho}}(\chi_{ss} + \chi_{tt}) \quad (2.14)$$

**Proposição 2.5.3** *Seja  $\chi : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma superfície tipo-espaço dada por uma imersão conforme, então  $\Delta\chi = -2HN$ .*

**Demonstração:** Por (2.11), temos:

$$\langle \chi_s, \chi_s \rangle_1 = e^{2\rho} = \langle \chi_t, \chi_t \rangle_1 \quad (2.15)$$

$$\langle \chi_s, \chi_t \rangle_1 = 0. \quad (2.16)$$

Derivando (2.15) em relação à  $s$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} (\langle \chi_s, \chi_s \rangle_1) &= \frac{\partial}{\partial s} (\langle \chi_t, \chi_t \rangle_1) \\ 2 \langle \chi_{ss}, \chi_s \rangle_1 &= 2 \langle \chi_{st}, \chi_t \rangle_1 \\ \therefore \langle \chi_{ss}, \chi_s \rangle_1 &= \langle \chi_{st}, \chi_t \rangle_1. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Derivando (2.16) em relação à  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\langle \chi_s, \chi_t \rangle_1) &= \frac{\partial}{\partial t} (0) \\ \langle \chi_{st}, \chi_t \rangle_1 + \langle \chi_s, \chi_{tt} \rangle_1 &= 0 \\ \therefore \langle \chi_{tt}, \chi_s \rangle_1 &= - \langle \chi_{st}, \chi_t \rangle_1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

De (2.17) e (2.18), temos então:

$$\langle \chi_{ss} + \chi_{tt}, \chi_s \rangle_1 = 0. \quad (2.19)$$

Utilizando um processo análogo, podemos derivar (2.15) em relação à  $t$  e (2.16) em relação à  $s$  para obter

$$\langle \chi_{ss} + \chi_{tt}, \chi_t \rangle_1 = 0. \quad (2.20)$$

Portanto, de (2.19) e (2.20) conclui-se que  $\chi_{ss} + \chi_{tt} = e^{2\rho} \Delta\chi \in \text{span}\{N\}$ , então

$$e^{2\rho} \Delta\chi = -e^{2\rho} \langle \Delta\chi, N \rangle_1 N. \quad (2.21)$$

Além disso, sabemos que o campo  $N$  é tal que  $\langle N, N \rangle_1 = -1$ , então

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \langle N, N \rangle_1 &= \frac{\partial}{\partial s} (-1) \\ 2 \langle N_s, N \rangle_1 &= 0 \\ \therefore \langle N_s, N \rangle_1 &= 0. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \langle N, N \rangle_1 &= \frac{\partial}{\partial t} (-1) \\ \mathcal{Z} \langle N_t, N \rangle_1 &= 0 \\ \therefore \langle N_t, N \rangle_1 &= 0.\end{aligned}$$

Ou seja, os vetores  $N_s(p)$  e  $N_t(p)$  são ortogonais a  $N(p)$ , portanto pertencem à  $T_p\Sigma$ . Expressando então esses vetores na base ortogonal  $\{\chi_s, \chi_t\}$ :

$$\begin{aligned}N_s &= a_{11}\chi_s + a_{21}\chi_t \\ N_t &= a_{12}\chi_s + a_{22}\chi_t\end{aligned}$$

em outras palavras, a matrix do operador  $d_p N$  na base  $\{\chi_s, \chi_t\}$  é dada por:

$$dN_{\{\chi_s, \chi_t\}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Além disso, da ortogonalidade dos vetores tangentes à  $\Sigma$  com o vetor  $N$ , obtemos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\langle \chi_s, N \rangle_1 = 0 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \langle \chi_s, N \rangle_1 = \frac{\partial}{\partial s} (0), \\ \langle \chi_{ss}, N \rangle_1 + \langle \chi_s, N_s \rangle_1 &= 0, \\ \langle \chi_{ss}, N \rangle_1 &= -\langle \chi_s, N_s \rangle_1, \\ \langle \chi_{ss}, N \rangle_1 &= -a_{11} \langle \chi_s, \chi_s \rangle_1, \\ \therefore \langle \chi_{ss}, N \rangle_1 &= -a_{11}e^{2\rho},\end{aligned} \quad (2.23)$$

e também

$$\begin{aligned}\langle \chi_t, N \rangle_1 = 0 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \langle \chi_t, N \rangle_1 = \frac{\partial}{\partial t} (0), \\ \langle \chi_{tt}, N \rangle_1 + \langle \chi_t, N_t \rangle_1 &= 0, \\ \langle \chi_{tt}, N \rangle_1 &= -\langle \chi_t, N_t \rangle_1, \\ \langle \chi_{tt}, N \rangle_1 &= -a_{22} \langle \chi_t, \chi_t \rangle_1, \\ \therefore \langle \chi_{tt}, N \rangle_1 &= -a_{22}e^{2\rho}.\end{aligned} \quad (2.24)$$

Assim, podemos usar novamente (2.9) e (2.10) e temos que

$$H = -\frac{1}{2}tr(dN) = -\frac{a_{11} + a_{22}}{2} \quad (2.25)$$

e por fim, calculamos  $\langle e^{2\rho} \Delta \chi, N \rangle_1$  com a ajuda de (2.23), (2.24) e (2.25):

$$\begin{aligned} e^{2\rho} \langle \Delta \chi, N \rangle_1 &= \langle \chi_{ss} + \chi_{tt}, N \rangle_1 \\ &= \langle \chi_{ss}, N \rangle_1 + \langle \chi_{tt}, N \rangle_1 \\ &= -a_{11}e^{2\rho} - a_{22}e^{2\rho} \\ &= 2 \cdot \left( -\frac{a_{11} + a_{22}}{2} \right) e^{2\rho} \\ &= 2He^{2\rho}. \end{aligned}$$

Voltando em (2.21):

$$\Delta \chi = -2HN.$$

□

Como consequência da Proposição 2.5.3 e da Definição 2.4.9, temos o corolário a seguir.

**Corolário 2.5.4** *Seja  $\chi : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma imersão conforme e  $\Sigma$  uma superfície de Riemann. Então  $\chi$  é uma imersão máxima se e somente se  $\Delta \chi = 0$  isto é, se  $\chi$  é harmônica no sentido euclidiano. Em particular,  $\Sigma$  é não compacta.*

No trabalho de Kobayashi [14], temos uma representação de Enneper-Weierstrass para imersões máximas em  $\mathbb{L}^3$ . Em [3] encontramos tal representação reescrita globalmente para a versão Euclideana. A representação em questão consiste em obter a parametrização da superfície máxima  $\chi$ , a partir de uma função complexa  $\phi$  com propriedades específicas.

**Definição 2.5.5** *Uma superfície máxima é uma imersão máxima*

$$\chi : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^3$$

*cuja métrica Riemanniana induzida é  $I = e^{2\rho}|dz|^2$ , onde  $z = s + it$ .*

Nessas condições, as coordenadas de  $\chi$  são harmônicas no sentido euclidiano, como visto no Corolário 2.5.4. Além disso, ao escrever  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , estamos ressaltando que  $\Omega$  herda uma estrutura de superfície de Riemann via  $\chi$ , sendo esta estrutura a mesma que  $\Omega$  tem como subconjunto de  $\mathbb{C}$ .

A definição a seguir será importante para o Teorema 2.5.12.

**Definição 2.5.6** *(Representação de Enneper-Weierstrass para superfícies máximas) Seja  $\chi : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma superfície máxima com parâmetro complexo*

local  $z = s + it$ . Construimos então uma função complexa  $\phi$  associada a  $\chi$  da seguinte forma. Para cada  $k = 1, 2, 3$ , seja

$$\phi_k(z) = \frac{\partial \chi_k}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \chi_k}{\partial s} - i \frac{\partial \chi_k}{\partial t} \right). \quad (2.26)$$

Então, colocamos

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}^3 \\ z &\mapsto \phi(z) = (\phi_1(z), \phi_2(z), \phi_3(z)) \end{aligned}$$

com essa notação,  $\phi$  é chamada de Representação de Enneper-Weierstrass para superfícies máximas.

**Proposição 2.5.7** *Seja  $\chi : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma superfície máxima e seja  $\phi$  sua representação de Enneper-Weierstrass como na Definição 2.5.6, então tem-se que*

$$(i) \quad \phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 = 0,$$

$$(ii) \quad |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 - |\phi_3|^2 > 0.$$

**Demonstração:** Abrindo a expressão no item (i):

$$\begin{aligned} &\phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \left( \frac{\partial \chi_1}{\partial s} - i \frac{\partial \chi_1}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \chi_2}{\partial s} - i \frac{\partial \chi_2}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial \chi_3}{\partial s} - i \frac{\partial \chi_3}{\partial t} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \overbrace{\left( \frac{\partial \chi_1}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial \chi_2}{\partial s} \right)^2 - \left( \frac{\partial \chi_3}{\partial s} \right)^2}^{\langle \chi_s, \chi_s \rangle_1} \right) \\ &\quad + i^2 \frac{1}{4} \left( \overbrace{\left( \frac{\partial \chi_1}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \chi_2}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial \chi_3}{\partial t} \right)^2}^{\langle \chi_t, \chi_t \rangle_1} \right) \\ &\quad - 2i \frac{1}{4} \left( \overbrace{\left( \frac{\partial \chi_1}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial \chi_1}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial \chi_2}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial \chi_2}{\partial t} \right) - \left( \frac{\partial \chi_3}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial \chi_3}{\partial t} \right)}^{\langle \chi_s, \chi_t \rangle_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} (e^{2\rho} - e^{2\rho} - 2i \cdot 0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Abrindo agora a expressão no item (ii):

$$\begin{aligned}
&|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 - |\phi_3|^2 \\
&= \phi_1 \cdot \overline{\phi_1} + \phi_2 \cdot \overline{\phi_2} - \phi_3 \cdot \overline{\phi_3} \\
&= \frac{\left(\frac{\partial \chi_1}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \chi_3}{\partial s}\right)^2 - \left(\frac{\partial \chi_3}{\partial t}\right)^2}{4} \\
&= \frac{\left(\frac{\partial \chi_1}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial s}\right)^2 - \left(\frac{\partial \chi_3}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \chi_3}{\partial t}\right)^2}{4} \\
&= \frac{e^{2\rho} + e^{2\rho}}{4} \\
&= \frac{e^{2\rho}}{2} > 0.
\end{aligned}$$

□

**Definição 2.5.8** Podemos definir a 1-forma complexa dada por  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$  que em coordenadas locais é escrita como:

$$\Phi_k = \phi_k dz, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.27)$$

**Observação 2.5.9** Note que se  $w = x + iy$  é um outro parâmetro conforme em torno de  $p \in \Sigma$ , então a mudança de coordenadas  $w = w(z)$  é uma função complexa holomorfa e a diferencial  $w_z$  é tal que  $|w_z| \neq 0$ . Assim, denotando por  $\tilde{\phi} = \chi_w$ , a função complexa associada a  $\chi$  em termos do parâmetro  $w$ , temos:

$$\phi = \frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{\partial \chi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} = \tilde{\phi} \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Considerando então as 1-formas complexas dadas por  $\Phi = \phi dz$  e  $\tilde{\Phi} = \tilde{\phi} dw$ , temos:

$$\Phi = \phi dz = \tilde{\phi} \frac{\partial w}{\partial z} dz = \tilde{\phi} dw = \tilde{\Phi}.$$

Portanto, temos uma 1-forma globalmente definida sobre  $\Sigma$  independente da parametrização isotérmica inicialmente escolhida.

**Observação 2.5.10** Uma condição necessária e suficiente para que uma função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  seja holomorfa, é que:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (f) = 0$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\phi) &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial s} + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \chi}{\partial s} - i \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} - i \frac{\partial^2 \chi}{\partial s \partial t} + i \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial s} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) \\
&\quad \therefore \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \phi = \frac{1}{4} e^{2\rho} \Delta \chi.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Portanto, usando o Corolário 2.5.4 segue que  $\phi$  é holomorfa se e somente se  $\chi : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  é uma imersão máxima, e o mesmo pode ser dito sobre as 1-formas complexas  $\Phi_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

Vale comentar que as 1-formas não tem períodos reais e a imersão  $\chi$  pode ser obtida a partir de  $\Phi$  através da relação

$$\chi(z) = 2 \operatorname{Re} \int_{\gamma_z} (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3), \tag{2.29}$$

onde  $\gamma_z$  é um caminho qualquer de um ponto fixado em  $\mathbb{C}$  até o ponto  $z \in x^{-1}(\Sigma) \subset \mathbb{C}$ .

**Observação 2.5.11** Diz-se que  $\Phi$  não tem períodos reais se a parte real da integral de  $\Phi$  ao longo de qualquer caminho fechado é zero. Isso é equivalente à integral  $\operatorname{Re} \int_{\gamma_z} \Phi$  ser independente do caminho.

A recíproca será anunciada a seguir na forma de um teorema (e pode ser encontrada em [2], p. 292-293).

**Teorema 2.5.12** Seja  $\Sigma$  uma superfície de Riemann e  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  três 1-formas holomorfas globalmente definidas sobre  $\Sigma$  satisfazendo:

- (i)  $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 - \Phi_3^2 = 0$  (i.e., localmente  $\Phi_k = \phi_k dz$  e  $\phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 = 0$ ),
- (ii)  $|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 - |\Phi_3|^2 > 0$ ,
- (iii) Cada  $\Phi_k$  não tem períodos reais.

Então, a aplicação  $\chi : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  dada pela equação (2.29) é uma imersão máxima em  $\mathbb{L}^3$ .

## Capítulo 3

# O Problema de Björling para superfícies máximas em $\mathbb{L}^3$

Neste capítulo iremos enunciar o Problema de Björling para superfícies máximas, bem como fornecer uma solução analítica para o mesmo. Além disso, comentaremos alguns casos particulares e algumas simetrias dessas superfícies.

### 3.1 A representação de Björling para superfícies máximas

Antes de começarmos, mostraremos alguns resultados que serão úteis mais pra frente.

**Definição 3.1.1** *Um conjunto aberto e conexo  $\Omega \subset \mathbb{C}$  é dito um domínio (ou domínio complexo). Daqui em diante, toda vez que escrevermos  $\Omega \subset \mathbb{C}$  estará implícito que se trata de um domínio.*

**Teorema 3.1.2** *(O princípio da identidade para funções holomorfas)*  
*Sejam duas funções  $f$  e  $g$  holomorfas em  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Se  $f(z) = g(z)$  para todo  $z$  contido em uma curva no interior de  $\Omega$ , então  $f(z) = g(z)$ ,  $\forall z \in \Omega$ .<sup>1</sup>*

**Teorema 3.1.3** *Seja  $\Omega$  simplesmente conexo e  $h : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função harmônica, então existe uma função  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa, tal que  $h = \operatorname{Re}\{f\}$ . Tal função é única a menos de uma constante.*

---

<sup>1</sup>Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [1] p. 122.



**Demonstração:** Começaremos pela unicidade supondo que temos a existência. Se  $h = \operatorname{Re}\{f\}$  para alguma função holomorfa  $f$ , digamos  $f(z) = h(z) + ik(z)$ , onde  $k$  também é uma função real analítica e  $z = s + it$ , então pelas equações de Cauchy-Riemann,

$$f'(z) = \frac{\partial h}{\partial s}(z) + i\frac{\partial k}{\partial s}(z) = \frac{\partial h}{\partial t}(z) - i\frac{\partial h}{\partial t}(z). \quad (3.1)$$

Assim, se tal  $f$  existe, então ela está completamente determinada pelas derivadas de primeira ordem de  $h$ , a menos de uma constante de integração. A equação (3.1) nos permite obter uma expressão para  $f$ . Defina:

$$g(z) = \frac{\partial h}{\partial t}(z) - i\frac{\partial h}{\partial t}(z),$$

então  $g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  e  $g$  satisfaz as equações de Cauchy-Riemann, pois

$$\begin{aligned} h_{ss} &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial h}{\partial s} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right) = -h_{tt} \\ h_{st} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial h}{\partial s} \right) = -\frac{\partial}{\partial s} \left( -\frac{\partial h}{\partial t} \right) = h_{st}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

em (3.2) usamos que  $h$  é harmônica ( $h_{ss} + h_{tt} = 0$ ).

Temos portanto que  $g$  é holomorfa em  $\Omega$ . Seja agora  $z_0 \in \Omega$  fixado e arbitrário e seja  $f$  a seguinte primitiva de  $g$ :

$$f(z) = h(z_0) + \int_{z_0}^z g(w)dw \quad (3.3)$$

com a integral sendo tomada ao longo de um caminho contido em  $\Omega$  conectando  $z_0$  a  $z$  e, como  $\Omega$  é simplesmente conexa, a integral independe do caminho escolhido. Por construção,  $f$  é holomorfa e

$$f'(z) = g(z) = \frac{\partial h}{\partial s}(z) - i\frac{\partial h}{\partial t}(z). \quad (3.4)$$

Seja agora outra função harmônica em  $\Omega$ ,  $\tilde{h}$  tal que  $\tilde{h} = \operatorname{Re}\{f\}$ . Aplicando Cauchy-Riemman a  $f$ :

$$f'(z) = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial s}(z) - i\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t}(z). \quad (3.5)$$

Comparando (3.4) e (3.5), vemos que  $\tilde{h}_s = h_s$  e  $\tilde{h}_t = h_t$  e portanto  $\tilde{h} - h$  é constante em  $\Omega$ . Como  $h(z_0) = \tilde{h}(z_0)$ , temos que  $h \equiv \tilde{h}$  em  $\Omega$ . Para a existência, basta tomar  $f$  como em (3.3) e o resultado segue.

□

**Teorema 3.1.4** (*Princípio da Identidade para funções harmônicas*)

Seja  $h : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função harmônica. Se  $h = 0$  em um conjunto não vazio  $W \subset \Omega$ , então  $h(z) = 0, \forall z \in \Omega$ .

**Demonstração:** Defina  $g : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$g(z) = \frac{\partial h}{\partial s}(z) - i \frac{\partial h}{\partial t}(z).$$

Assim como na demonstração do teorema anterior, temos que  $g$  é holomorfa em  $\Omega$ . Como  $h(z) = 0 \forall z \in W$ , temos que  $g(z) = 0 \forall z \in W$ . Portanto, usando o Princípio da Identidade para funções holomorfas (3.1.2), temos que  $g(z) = 0 \forall z \in \Omega$  e, conseqüentemente,

$$\frac{\partial h}{\partial s}(z) = 0 = \frac{\partial h}{\partial t}(z), \forall z \in \Omega,$$

o que nos dá que  $h(z)$  é constante em todo  $\Omega$ , porém sabemos que  $h(z)$  é nula em  $W \subset \Omega$ , portanto deve ser nula em todo  $\Omega$ .

□

**Corolário 3.1.5** Se  $h_1, h_2 : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  são duas funções harmônicas com  $h_1(z) = h_2(z), \forall z \in W \subset \Omega$ , em que  $W$  é não vazio, então  $h_1(z) = h_2(z), \forall z \in \Omega$ .

**Demonstração:** De fato, basta definirmos a função

$$\begin{aligned} h : \Omega \subset \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto h(z) = h_1(z) - h_2(z) \end{aligned}$$

que é harmônica por construção, já que a derivada é uma aplicação linear. Assim, basta aplicar o Teorema 3.1.4 à função  $h$  e o resultado segue.

□

**Proposição 3.1.6** Seja  $\chi : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma imersão conforme com métrica  $I = e^{2\rho} \{ds^2 + dt^2\}$ . Se  $z = s + it$ , então

$$N \wedge \chi_s = -\chi_t. \quad (3.6)$$

**Demonstração:** Temos que

$$\begin{aligned} N \wedge \chi_s &= \frac{\chi_s \wedge \chi_t}{|\chi_s \wedge \chi_t|} \wedge \chi_s \\ &= \frac{1}{|\chi_s \wedge \chi_t|} (\chi_s \wedge \chi_t) \wedge \chi_s. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Separaremos as contas em duas partes, primeiro, vamos obter o valor do escalar  $|\chi_s \wedge \chi_t|$ , para isso vamos utilizar a notação:

$$\begin{aligned} \chi_s &= (\chi_s^1, \chi_s^2, \chi_s^3), \\ \chi_t &= (\chi_t^1, \chi_t^2, \chi_t^3). \end{aligned}$$

Assim, usando a expressão em (2.4):

$$\chi_s \wedge \chi_t = (\chi_s^2 \chi_t^3 - \chi_s^3 \chi_t^2, \chi_s^3 \chi_t^1 - \chi_s^1 \chi_t^3, -\chi_s^1 \chi_t^2 + \chi_s^2 \chi_t^1)$$

e então,

$$\begin{aligned} &\langle \chi_s \wedge \chi_t, \chi_s \wedge \chi_t \rangle_1 \\ &= (\chi_s^2 \chi_t^3 - \chi_s^3 \chi_t^2)^2 + (\chi_s^3 \chi_t^1 - \chi_s^1 \chi_t^3)^2 - (-\chi_s^1 \chi_t^2 + \chi_s^2 \chi_t^1)^2 \\ &= (\chi_s^2)^2 (\chi_t^3)^2 + (\chi_s^3)^2 (\chi_t^2)^2 + (\chi_s^3)^2 (\chi_t^1)^2 + (\chi_s^1)^2 (\chi_t^3)^2 \\ &\quad - (\chi_s^2)^2 (\chi_t^1)^2 - (\chi_s^1)^2 (\chi_t^2)^2 - 2(\chi_s^2 \chi_s^3 \chi_t^2 \chi_t^3 + \chi_s^1 \chi_s^3 \chi_t^1 \chi_t^3 - \chi_s^1 \chi_s^2 \chi_t^1 \chi_t^2) \\ &= (\chi_s^1)^2 \left[ \underbrace{(\chi_t^3)^2 - (\chi_t^2)^2}_{(\chi_t^1)^2 - e^{2\rho}} \right] + (\chi_s^2)^2 \left[ \underbrace{(\chi_t^3)^2 - (\chi_t^1)^2}_{(\chi_t^2)^2 - e^{2\rho}} \right] + (\chi_s^3)^2 \left[ \underbrace{(\chi_t^1)^2 + (\chi_t^2)^2}_{(\chi_t^3)^2 + e^{2\rho}} \right] \\ &\quad - 2(\chi_s^2 \chi_s^3 \chi_t^2 \chi_t^3 + \chi_s^1 \chi_s^3 \chi_t^1 \chi_t^3 - \chi_s^1 \chi_s^2 \chi_t^1 \chi_t^2) \\ &= \left[ (\chi_s^1)^2 + (\chi_t^1)^2 + (\chi_s^2)^2 + (\chi_t^2)^2 + (\chi_s^3)^2 + (\chi_t^3)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2(\chi_s^2 \chi_s^3 \chi_t^2 \chi_t^3 + \chi_s^1 \chi_s^3 \chi_t^1 \chi_t^3 - \chi_s^1 \chi_s^2 \chi_t^1 \chi_t^2) \right] \\ &\quad - e^{2\rho} \left( \underbrace{(\chi_s^1)^2 + (\chi_s^2)^2 + \chi_s^3)^2}_{e^{2\rho}} \right) \\ &= \left[ \underbrace{(\chi_s^1)(\chi_t^1) + (\chi_s^2)(\chi_t^2) - (\chi_s^3)(\chi_t^3)}_{\langle \chi_s, \chi_t \rangle_1 = 0} \right]^2 - e^{2\rho} \cdot e^{2\rho} \\ &= -(e^{2\rho})^2. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$|\chi_s \wedge \chi_t| = \sqrt{|-(e^{2\rho})^2|} = e^{2\rho}. \quad (3.8)$$

Calculemos agora a componente vetorial da expressão (3.7):

$$\begin{aligned}
(\chi_s \wedge \chi_t) \wedge \chi_s &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & -\hat{\mathbf{k}} \\ \chi_s^2 \chi_t^3 - \chi_s^3 \chi_t^2 & \chi_s^3 \chi_t^1 - \chi_s^1 \chi_t^3 & \chi_s^2 \chi_t^1 - \chi_s^1 \chi_t^2 \\ \chi_s^1 & \chi_s^2 & \chi_s^3 \end{vmatrix} \\
&= \hat{\mathbf{i}} \cdot [\chi_s^3(\chi_s^3 \chi_t^1 - \chi_s^1 \chi_t^3) - \chi_s^2(\chi_s^2 \chi_t^1 - \chi_s^1 \chi_t^2)] \\
&\quad + \hat{\mathbf{j}} \cdot [\chi_s^1(\chi_s^2 \chi_t^1 - \chi_s^1 \chi_t^2) - \chi_s^3(\chi_s^2 \chi_t^3 - \chi_s^3 \chi_t^2)] \\
&\quad + \hat{\mathbf{k}} \cdot [\chi_s^1(\chi_s^3 \chi_t^1 - \chi_s^1 \chi_t^3) - \chi_s^2(\chi_s^2 \chi_t^3 - \chi_s^3 \chi_t^2)] \\
&= \hat{\mathbf{i}} \cdot \left[ \underbrace{\chi_t^1[(\chi_s^3)^2 - (\chi_s^2)^2]}_{(\chi_s^1)^2 - e^{2\rho}} + \underbrace{\chi_s^1[\chi_s^2 \chi_t^2 - \chi + s^3 \chi_s^3]}_{-(\chi_s^1)(\chi_t^1)} \right] \\
&\quad + \hat{\mathbf{j}} \cdot \left[ \underbrace{\chi_t^2[(\chi_s^3)^2 - (\chi_s^1)^2]}_{(\chi_s^2)^2 - e^{2\rho}} + \underbrace{\chi_s^2[\chi_s^1 \chi_t^1 - \chi + s^3 \chi_s^3]}_{-(\chi_s^2)(\chi_t^2)} \right] \\
&\quad + \hat{\mathbf{k}} \cdot \left[ \underbrace{\chi_t^3[-(\chi_s^1)^2 - (\chi_s^2)^2]}_{-(\chi_s^3)^2 - e^{2\rho}} + \underbrace{\chi_s^3[\chi_s^1 \chi_t^1 + \chi + s^2 \chi_s^2]}_{\chi_s^3 \chi_s^3} \right] \\
&= \hat{\mathbf{i}}[-\chi_t^1 e^{2\rho}] + \hat{\mathbf{j}}[-\chi_t^2 e^{2\rho}] + \hat{\mathbf{k}}[-\chi_t^3 e^{2\rho}] \\
&= -e^{2\rho}(\chi_t^1, \chi_t^2, \chi_t^3). \\
&\therefore (\chi_s \wedge \chi_t) \wedge \chi_s = -e^{2\rho} \chi_t. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Substituindo em (3.7) o que conseguimos em (3.8) e (3.9) temos:

$$N \wedge \chi_s = \frac{1}{e^{2\rho}} \cdot (-e^{2\rho} \chi_t) = -\chi_t,$$

□

Enfim, estamos prontos para o problema de Björling. Começaremos apresentando uma representação complexa local para superfícies máximas. Tal representação é inspirada na fórmula de Schwarz que fornece a solução para o problema de Björling para superfícies mínimas no espaço Euclidiano (ver [9]) e será o resultado central para muito do que faremos a seguir.

**Definição 3.1.7** Dizemos que uma curva regular  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$  é tipo-espaço se  $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_1 > 0$ ,  $\forall s \in I$ .

**Teorema 3.1.8** (Representação de Björling)

Seja  $\chi : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma superfície máxima em  $\mathbb{L}^3$  e defina a curva

$\alpha(s) = \chi(s, 0)$  e o campo  $V(s) = N(s, 0)$  definidos em um intervalo real  $I \subset \Omega$ . Escolha um conjunto aberto e simplesmente conexo  $\Delta \subset \Omega$  que contenha  $I$  sobre o qual é possível definir extensões holomorfas  $\alpha(z)$  e  $V(z)$  de  $\alpha$  e  $V$ . Então, para todo  $z \in \Delta$  vale:

$$\chi(z) = \operatorname{Re} \left( \alpha(z) + i \int_{s_0}^z (V \wedge \alpha')(w) dw \right), \quad (3.10)$$

onde  $s_0$  é um ponto fixado porém arbitrário em  $I$  e a integral é calculada ao longo de um caminho qualquer dentro de  $\Delta$  ligando  $s_0$  e  $z$ .

É importante fazer algumas observações sobre a representação de Björling:

**Observação 3.1.9** *No estudo da análise complexa, um importante problema é a extensão de funções reais para um domínio complexo. Temos que uma condição necessária e suficiente para que uma função real  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  admita uma extensão holomorfa  $f(z)$  é que  $f(s)$  seja analítica para todo  $s \in I$ . Existindo tal extensão holomorfa, esta é única.<sup>2</sup>*

**Observação 3.1.10** *Como  $\chi$  é uma superfície máxima, as funções coordenadas de  $\alpha$  e  $V$  são reais analíticas. Com isso, temos que as extensões holomorfas  $\alpha(z)$  e  $V(z)$  sempre existem e são únicas pela observação anterior. Veja também que se  $\alpha$  é uma curva unitária, então a extensão  $\alpha(z)$  satisfaz  $\langle \alpha'(z), \alpha'(z) \rangle_1 = 1, \forall z \in \Delta$ .*

**Observação 3.1.11** *A integral em (3.10) não depende do caminho escolhido, pois a região  $\Delta$  é simplesmente conexa e  $(V \wedge \alpha')$  é holomorfa. Assim,  $\chi(z)$  está bem definida  $\forall z \in \Delta$ .*

**Observação 3.1.12** *Qualquer que seja a nossa escolha de  $s_0 \in I$  em (3.10), a expressão obtida será a mesma. De fato, escolha  $s_1 \neq s_0$  também em  $I$  e denote por  $[s_0, s_1]$  o caminho que liga  $s_0$  a  $s_1$  contido na reta real. Assim,*

---

<sup>2</sup>Uma demonstração desse fato pode ser encontrada em [18] p. 346-347.

temos

$$\begin{aligned}
\chi(z) &= \operatorname{Re} \left( \alpha(z) + i \int_{s_0}^z (V \wedge \alpha')(w) dw \right) \\
&= \operatorname{Re} \left( \alpha(z) + i \left[ \int_{[s_0, s_1]} (V \wedge \alpha')(w) dw + \int_{s_1}^z (V \wedge \alpha')(w) dw \right] \right) \\
&= \operatorname{Re} \left( \alpha(z) + i \int_{s_1}^z (V \wedge \alpha')(w) dw \right) + \operatorname{Re} \left( i \cdot \underbrace{\int_{[s_0, s_1]} (V \wedge \alpha')(w) dw}_{\in \mathbb{R}} \right) \\
&= \operatorname{Re} \left( \alpha(z) + i \int_{s_1}^z (V \wedge \alpha')(w) dw \right)
\end{aligned}$$

Pois  $V$  e  $\alpha'$  estão restritas a valores reais em  $[s_0, s_1]$ .

**Demonstração: (Representação de Björling)**

Como temos que  $\chi : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^3$  é uma imersão máxima, podemos aplicar a representação de Enneper-Weierstrass para obter que a função complexa  $\phi : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$  definida por

$$\phi(z) = \frac{\partial \chi}{\partial z}$$

é holomorfa em  $\Omega$ , afinal como visto na Observação 2.5.10,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \phi(z) = 0.$$

Temos também que se  $\gamma_z$  é um caminho que liga um ponto de  $I$  a  $z$  em  $\Delta$ , então

$$\chi(z) = 2\operatorname{Re} \int_{\gamma_z} \phi(w) dw, \quad (3.11)$$

com a constante de integração sendo aquela que torna  $\chi(s, 0) = \alpha(s)$ ,  $\forall s \in I$ . Utilizando agora (3.1.6), obtemos:

$$\phi(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \chi}{\partial s}(z) - i \frac{\partial \chi}{\partial t}(z) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \chi}{\partial s}(z) + i N(z) \wedge \frac{\partial \chi}{\partial s}(z) \right).$$

Se restringimos  $z$  a valores em  $I$ , podemos reescrever a expressão acima em termos de  $\alpha$  e  $V$  como definimos em (3.10):

$$\phi(s, 0) = \frac{1}{2} (\alpha'(s) + i V(s) \wedge \alpha'(s)).$$

O mapa  $\phi(\cdot, 0) : I \rightarrow \mathbb{C}^3$  pode então ser estendido de forma única a partir das extensões holomorfas de  $\alpha$  e  $V$ :

$$\phi(z) = \frac{1}{2} (\alpha'(z) + iV(z) \wedge \alpha'(z)), \quad \forall z \in \Delta. \quad (3.12)$$

Como  $\Delta$  é simplesmente conexo e a aplicação  $(V \wedge \alpha')(w)$  é holomorfa em  $\Delta$ , a integral

$$\int_{s_0}^z (V \wedge \alpha')(w) dw$$

não depende da trajetória, assim, podemos definir a aplicação

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \left( \alpha(z) + i \int_{s_0}^z (V \wedge \alpha')(w) dw \right),$$

que é uma primitiva da aplicação holomorfa  $\phi(z)$  (dada em (3.12)) em  $\Delta$ . Além disso, quando restringimos  $z = s + it$  a valores em  $I$  a condição  $2\operatorname{Re} \{\varphi(s, 0)\} = \alpha(s)$  é satisfeita. Substituindo em (3.11), concluímos que

$$\chi(z) = \operatorname{Re} \left( \alpha(z) + i \int_{s_0}^z (V \wedge \alpha')(w) dw \right).$$

□

Munidos da representação de Björling, vamos agora enunciar o problema que dá nome a este trabalho.

**O problema de Björling para superfícies máximas em  $\mathbb{L}^3$ :**

*"Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma curva analítica tipo-espaco em  $\mathbb{L}^3$  e seja  $V : I \rightarrow \mathbb{L}^3$  um campo de vetores unitários tipo-tempo ao longo de  $\alpha$  tal que  $\langle \alpha'(s), V(s) \rangle_1 = 0, \forall s \in I$ . Determine uma superfície máxima  $\chi : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^3$  tal que  $\chi(s, 0) = \alpha(s)$  e  $N(s, 0) = V(s) \forall s \in I$ . Aqui  $\Omega$  é um domínio complexo contendo o intervalo real  $I$  e  $N : \Omega \rightarrow \mathbb{L}^3$  é a aplicação normal de Gauss da superfície."*

Considere o caso particular em que  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$  é uma curva analítica tipo-espaco parametrizada pelo comprimento de arco tal que  $\alpha''(s)$  é tipo-tempo  $\forall s \in I$ . Assim, temos que:

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_1 = 1,$$

de onde segue que

$$\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle_1 = 0, \quad \forall s \in I.$$

Então  $V = \alpha''/|\alpha''|$  é um campo vetorial unitário tipo-tempo ao longo de  $\alpha$  tal que  $\langle \alpha', V \rangle_1 \equiv 0$ . Isso nos diz que o problema de Björling é uma generalização do seguinte problema restrito:

"Seja  $I$  um intervalo real e  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma curva real analítica em  $\mathbb{L}^3$  tal que  $\langle \alpha', \alpha' \rangle_1 \equiv 1$  e tal que  $\alpha''(s)$  é um vetor tipo-tempo  $\forall s \in I$ . Construa então uma superfície máxima em  $\mathbb{L}^3$  contendo  $\alpha$  como geodésica."

Como temos que  $\alpha$  é uma geodésica em uma superfície tipo-espaço em  $\mathbb{L}^3$ , temos que o vetor  $\alpha''(s)$  é paralelo à  $N(\alpha(s))$  para todo  $s \in I$ . Assim, sempre que  $\alpha''(s) \neq 0$  então  $\alpha''(s)$  é um vetor tipo-tempo. Justificamos assim a necessidade do vetor  $\alpha''(s)$  ser sempre tipo-tempo no problema acima.

**Observação 3.1.13** *Veja que, pela maneira que descrevemos o problema de Björling, não é suficiente determinar a existência da superfície máxima contendo uma faixa analítica tipo-espaço em  $\mathbb{L}^3$ , precisamos de fato propor uma construção explícita da superfície em questão. Na realidade, a questão de existência e unicidade de uma superfície nas condições do problema de Björling pode ser vista como uma consequência do teorema geral de Cauchy-Kovalevskaya (ver [12]) da seguinte forma: Sejam  $\alpha$  e  $V$  como nas condições do problema de Björling e defina  $\bar{V} = \alpha' \wedge V$ . Então, temos que as coordenadas de  $\alpha$  e  $\bar{V}$  são analíticas e assim os problemas de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \chi_k}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \chi_k}{\partial t^2} = 0 \\ \chi_k(s, 0) = \alpha_k(s) \\ \frac{\partial \chi_k}{\partial t}(s, 0) = \bar{V}_k(s) \end{cases} \quad (3.13)$$

para cada  $k = 1, 2, 3$ , tem solução única em uma certa vizinhança  $\Omega$  da origem. Perceba também que  $\text{span}\{\alpha', \bar{V}\}$  é um plano tipo-espaço em  $\mathbb{L}^3$ ,  $\forall s \in I$ . Assim, para uma região  $\Omega$  suficientemente pequena, a função  $\chi : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^3$  descrita por  $\chi(z) = (\chi_1(z), \chi_2(z), \chi_3(z))$  é uma superfície máxima do  $\mathbb{L}^3$  tal que  $\chi(s, 0) = \alpha(s)$  e  $N(s, 0) = V(s)$ . Com isso, temos garantidas a existência e a unicidade desejada e o próximo teorema tratará exatamente disso.

**Teorema 3.1.14** *Existe uma única solução para o problema de Björling para superfícies máximas em  $\mathbb{L}^3$ . De fato, sejam  $\alpha$  e  $V$  definidas de acordo com a nossa formulação do problema de Björling, então:*

- (i) *existe um conjunto aberto e simplesmente conexo  $\Omega \subset \mathbb{C}$  contendo  $I$  para o qual  $\alpha$  e  $V$  admitem extensões holomorfas  $\alpha(z)$  e  $V(z)$  em  $\Omega$  e a aplicação  $\chi : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^3$  dada por*

$$\chi(z) = \text{Re} \left( \alpha(z) + i \int_{s_0}^z (V \wedge \alpha')(w) dw \right) \quad (3.14)$$



é uma solução para o problema de Björling. Aqui  $s_0 \in I$  é fixado, porém arbitrário;

(ii) se temos duas soluções diferentes para o problema de Björling, a saber  $\chi : \Omega_1 \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^3$  e  $\psi : \Omega_2 \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^3$ , então  $\chi \equiv \psi$  sobre o conjunto aberto  $\Omega_1 \cap \Omega_2 \supset I$ , que não é vazio.

**Demonstração:** Começaremos pela demonstração de (ii). Desde que a solução exista, podemos recorrer à representação de Björling que mostra que toda solução para o problema de Björling é dada por (3.10) em qualquer conjunto aberto e simplesmente conexo no qual as extensões  $\alpha(z)$  e  $V(z)$  existem. Assim, cada par de soluções  $\chi, \psi$  para o problema de Björling coincidem sobre um conjunto aberto não vazio, além disso, como  $\chi$  e  $\psi$  são funções harmônicas, temos que elas coincidem em  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ .

Vamos agora provar (i) tendo como motivação a expressão em (3.10). Para tal, definiremos a aplicação holomorfa  $\phi : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$

$$\phi(z) = \frac{1}{2} (\alpha'(z) + i(V \wedge \alpha')(z)),$$

onde o conjunto  $\Omega$  é apenas um conjunto aberto contendo  $I$  no qual as extensões holomorfas  $\alpha(z)$  e  $V(z)$  existem. Denotando então  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ , temos:

$$\phi_1^2(z) + \phi_2^2(z) - \phi_3^2(z) = 0, \quad \forall z \in \Omega$$

e também

$$|\phi_1(s, 0)|^2 + |\phi_2(s, 0)|^2 - |\phi_3(s, 0)|^2 > 0, \quad \forall s \in I.$$

Usando o fato de que as extensões  $\alpha(z)$  e  $V(z)$  são holomorfas, vale então que diminuindo a região  $\Omega$  quando necessário, podemos assumir  $\Omega$  simplesmente conexo e assim

$$|\phi_1(z)|^2 + |\phi_2(z)|^2 - |\phi_3(z)|^2 > 0, \quad \forall z \in \Omega.$$

Assim, as coordenadas complexas  $\phi_k(z)$  são funções holomorfas que não possuem períodos reais,  $k = 1, 2, 3$ . Portanto, ao fixarmos  $s_0 \in I$ , o Teorema 2.5.12 nos garante que

$$\chi(z) = 2Re \int_{s_0}^z \phi(w) dw$$

é uma imersão máxima em  $\mathbb{L}^3$ , ou seja, a aplicação  $\chi : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^3$  dada por

$$\chi(z) = \operatorname{Re} \left( \alpha(z) + i \int_{s_0}^z (V \wedge \alpha')(w) dw \right) \quad (3.15)$$

determina uma superfície máxima. Precisamos apenas verificar se a superfície em questão é tal que as condições do problema de Björling são cumpridas, ou seja, se  $\chi(s, 0) = \alpha(s)$  e  $N(s, 0) = V(s)$ ,  $\forall s \in I$ . Como as funções  $V$  e  $\alpha'$  assumem valores reais quando restritas a  $I$ , temos que a expressão

$$i \int_{s_0}^z (V \wedge \alpha')(w) dw$$

é um número imaginário puro e assim, fica fácil ver em (3.15) que  $\chi(s, 0) = \alpha(s)$ .

Lembre agora que  $2\phi(z) = 2\chi_z$  e, conforme escrevemos o problema de Cauchy em (3.13),  $\forall z = s + i0 \in I$  temos:

$$\frac{\partial \chi}{\partial s}(s, 0) = \alpha'(s), \quad \frac{\partial \chi}{\partial t}(s, 0) = -(V \wedge \alpha')(s).$$

A partir destas duas relações e da Proposição 3.1.6, temos:

$$-V(s) \wedge \frac{\partial \chi}{\partial s}(s, 0) = \frac{\partial \chi}{\partial t}(s, 0) = -N(s, 0) \wedge \frac{\partial \chi}{\partial s}(s, 0).$$

Portanto temos a condição  $N(s, 0) = V(s)$  sendo satisfeita também.

□

**Observação 3.1.15** *Veja que na demonstração do item (ii) do Teorema 3.1.14 apenas argumentamos a unicidade da solução em uma região de  $\mathbb{C}$  comum às duas parametrizações. Porém, o corolário a seguir nos dará a unicidade da solução do problema de Björling que almejamos.*

**Corolário 3.1.16** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma curva regular tipo-espaço em  $\mathbb{L}^3$  e seja  $V : I \rightarrow \mathbb{L}^3$  um campo vetorial unitário tipo-tempo ao longo de  $\alpha$  tal que  $\langle \alpha', V \rangle_1 \equiv 0$ . Existe então uma única imersão máxima em  $\mathbb{L}^3$  cuja imagem contém  $\alpha(I)$  e que a aplicação normal de Gauss ao longo de  $\alpha$  é  $V$ . Além disso, a imersão máxima pode ser construída conforme (3.14).*

**Demonstração:** Do item (i) do Teorema 3.1.14 já temos a existência da solução, então seja  $Y : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma imersão máxima e seja  $(U, z)$  um sistema de coordenadas locais isotérmico tal que  $U \subset \Sigma$  é aberto e  $\alpha(I)$  é um pedaço conexo de  $\alpha(I)$  que está contido em  $Y(U)$ .

Temos então que a restrição de  $Y$  a  $U$ ,  $Y|_U$  pode ser expressa como uma superfície máxima  $\chi : \Omega = z^{-1}(U) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^3$ . Portanto, existe uma curva  $\gamma(s) : J \rightarrow \Omega$  tal que  $\chi(\gamma(s)) = \alpha(s)$  e  $N(\gamma(s)) = V(s)$ ,  $\forall s \in J$ . Como temos que as coordenadas de  $\alpha$  são funções analíticas e  $\chi$  é uma imersão máxima, temos que  $\gamma(s)$  também é analítica e portanto admite uma extensão holomorfa  $\gamma : W \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $W$  é um conjunto aberto contendo o intervalo  $J$ . Perceba também que como  $\alpha(s)$  é uma curva regular,  $\gamma(s)$  também o é.

Escolha agora um  $s_0 \in J$  qualquer. Temos que a função holomorfa  $\gamma(w)$  possui derivada não nula em  $s_0$  e portanto podemos aplicar o teorema da função inversa para funções holomorfas e obtemos a aplicação biholomorfa (ou seja, uma aplicação bijetiva holomorfa cuja inversa é também holomorfa)  $\gamma : W_1 \subset \mathbb{C} \rightarrow \Omega_1 \subset \mathbb{C}$ , onde  $W_1 \subset W$  é aberto em  $W$  e contém um intervalo real da forma  $(s_0 - \delta, s_0 + \delta)$  e  $\Omega_1 \subset \Omega$  é um aberto em  $\Omega$ . Com isso, temos que a superfície máxima  $\chi|_{\Omega_1} : \Omega_1 \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^3$  pode ser expressa como  $\psi : W_1 \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^3$ , com  $\psi(w) = \chi(\gamma(w))$ . Temos também que para todo  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$  e denotando por  $N_\psi$  a aplicação normal de Gauss em  $\psi$ , a aplicação  $\psi(w)$  satisfaz:

$$(i) \quad \psi(s, 0) = \chi(\gamma(s)) = \alpha(s),$$

$$(ii) \quad N_\psi(s, 0) = N(\gamma(s)) = V(s).$$

Portanto,  $\psi(w)$  é a solução para o problema de Björling dadas as condições de contorno  $\{\alpha, V\}$  o que significa que  $\psi(w)$  é única. Disso, concluímos também que  $Y : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  também é única, já que no item (ii) do Teorema 3.1.14 mostramos que não é possível que duas imersões máximas distintas se sobreponham num aberto não vazio.

□

**Observação 3.1.17** *Munidos do Teorema 3.1.14 e do Corolário 3.1.16 podemos nos referir à solução do problema de Björling, dadas as condições de contorno  $\{\alpha, V\}$ . Tal solução se refere à única imersão máxima em  $\mathbb{L}^3$  que contém  $\alpha$  em que  $V$  é a aplicação normal de Gauss ao longo de  $\alpha$ .*

## 3.2 Princípios de simetria para superfícies máximas

Como dito no título desta sessão, estamos interessados em estudar as simetrias presentes nas superfícies máximas. Começaremos enunciando o

princípio da Reflexão de Schwarz, seguido de algumas definições, todos necessários para o que será feito nesta seção.

**Teorema 3.2.1 (Princípio da Reflexão de Schwarz)**<sup>3</sup> *Seja  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa, onde  $D$  é uma região que intersecta o eixo real e  $f$  assume valores reais quando avaliada sobre o eixo real. Então  $f(z)$  assume valores conjugados para valores conjugados de  $z$ , isto é,*

$$f(z) = \overline{f(\bar{z})}, \quad \forall z \in D.$$

**Definição 3.2.2** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto. Definimos então o conjunto  $\Omega^*$  como sendo:*

$$\Omega^* = \{\bar{z} \in \mathbb{C} | z \in \Omega\},$$

*que é evidentemente aberto, afinal a interpretação geométrica do conjunto  $\Omega^*$  é a reflexão dos pontos de  $\Omega$  em relação ao eixo real.*

**Definição 3.2.3** *Seja  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  ( $f$  é holomorfa em  $\Omega$ ). Definimos então uma função holomorfa  $f^* \in \mathcal{H}(\Omega^*)$  da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} f^* : \Omega^* &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}. \end{aligned}$$

Assim, usando o princípio da reflexão de Schwarz, pode-se ver que se  $\Omega$  contém um intervalo real  $I$  e se  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  assume valores reais quando restrita a  $I$ , então  $f \equiv f^*$  no conjunto não vazio  $\Omega \cap \Omega^*$  e  $f$  pode ser estendida holomorficamente em  $\Omega \cup \Omega^*$  pelo Corolário 3.1.5.

**Corolário 3.2.4** *Seja  $\chi : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^3$  a solução para o problema de Björling com condições de contorno  $\{\alpha, V\}$ . Seja  $\Delta \subset \Omega$  um conjunto aberto e simplesmente conexo com  $I \subset \Delta$  e  $\Delta = \Delta^*$  sobre o qual  $\alpha$  e  $V$  possuem extensões holomorfas  $\alpha(z), V(z)$ . Então,  $\forall z \in \Delta$  vale:*

$$\chi(\bar{z}) = \text{Re} \left( \alpha(z) - i \int_{s_0}^z (V \wedge \alpha')(w) dw \right).$$

**Demonstração:** Definimos a aplicação  $\chi^* : z \in \Omega^* \mapsto \chi(\bar{z})$ . Denotando então por  $g_{ij}$  a métrica induzida de  $\chi : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^3$  e por  $g_{ij}^*$  a métrica

---

<sup>3</sup>Uma demonstração deste princípio pode ser encontrada em [21], p. 155-157.

induzida de  $\chi^* : \Omega^* \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^3$ , podemos ver que

$$\begin{aligned} g_{ss}^* &= \langle \chi_s^*, \chi_s^* \rangle_1 \\ &= \langle \chi_s, \chi_s \rangle_1 = g_{ss}, \\ g_{st}^* &= \langle \chi_s^*, \chi_t^* \rangle_1 \\ &= \langle \chi_s, \chi_{(-t)} \rangle_1 \\ &= \langle \chi_s, -\chi_t \rangle_1 = -g_{st}, \\ g_{tt}^* &= \langle \chi_t^*, \chi_t^* \rangle_1 \\ &= \langle \chi_{(-t)}, \chi_{(-t)} \rangle_1 \\ &= \langle -\chi_t, -\chi_t \rangle_1 = g_{tt}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} g_{ij}^* = g_{ij}, & i = j = s, t; \\ g_{ij}^* = -g_{ij}, & i \neq j. \end{cases}$$

Portanto, temos  $\det(g_{ij}^*) = \det(g_{ij})$  e como  $\chi(z)$  é uma superfície tipo-espaço,  $\chi^*(z)$  também o é e a sua aplicação normal de Gauss será dada por  $N^*(z) = -N(\bar{z})$ . Temos então que:

$$-2NH = \Delta\chi = \Delta\chi^* = -2N^*H^* = 2NH^*, \quad (3.16)$$

onde  $H$  e  $H^*$  são as respectivas curvaturas médias de  $\chi$  e  $\chi^*$ . Da equação (3.16) vemos que  $H^* = -H$  e assim  $\chi^*$  é uma superfície máxima sempre que  $\chi$  o é. Temos também que:

$$\begin{aligned} \chi^*(s, 0) &= \chi(s, 0) = \alpha(s), \\ N^*(s, 0) &= -N(s, 0) = -V(s) \end{aligned}$$

e aplicamos estes resultados à representação de Björling em (3.10), concluindo a nossa demonstração. □

Neste último corolário, está implícita a ideia de que se  $\chi(z)$  é a solução para o problema de Björling com condições de contorno  $\{\alpha, V\}$ , então a imersão  $\chi^*(\bar{z})$  é solução para o problema de Björling cujas condições de contorno são  $\{\alpha, -V\}$ .

O lema a seguir é uma consequência da representação de Björling e do fato de que curvas coordenadas sobre uma superfície máxima são reais analíticas.

**Lema 3.2.5** *Seja  $\chi : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma superfície máxima e  $\Omega$  tal que  $\Omega = \Omega^*$ . Defina  $\alpha(s) = \chi(s, 0)$ , então temos que*

(i) Se  $\alpha$  é tal que  $\alpha(s) = (\alpha_1(s), 0, 0)$ , isto é, a imagem de  $\alpha$  está contida no eixo  $x_1$ , então

$$(\chi_1(z), \chi_2(z), \chi_3(z)) = (\chi_1(\bar{z}), -\chi_2(\bar{z}), -\chi_3(\bar{z})).$$

(ii) Se a curva  $\alpha$  é tal que  $\alpha(s) = (\alpha_1(s), 0, \alpha_3(s))$ , isto é, a imagem de  $\alpha$  está contida no plano  $x_2 = 0$  (denotaremos tal plano por  $\Pi$ ), e a superfície intersecta  $\Pi$  ortogonalmente ao longo de  $\alpha$ , ou seja,  $N(s, 0) \in \Pi$ ,  $\forall s \in I$ , então

$$(\chi_1(z), \chi_2(z), \chi_3(z)) = (\chi_1(\bar{z}), -\chi_2(\bar{z}), \chi_3(\bar{z})).$$

**Demonstração:** A demonstração nos dois casos é feita de forma semelhante:

(i) Naturalmente, seja  $V(s) = N(s, 0)$ . Como  $\alpha$  está contida no eixo  $x_1$  e  $N$  é ortogonal a  $\alpha'$ , podemos escrever  $V(s) = (0, V_2(s), V_3(s))$ . Usando (2.4), temos que

$$V(s) \wedge \alpha'(s) = (0, V_3(s)\alpha'_1(s), V_2(s)\alpha'_1(s)).$$

Usando a representação de Björling em (3.10) e as extensões  $\alpha(z)$  e  $V(z)$ , podemos escrever  $\forall z \in \Delta$ :

$$\begin{aligned} & (\chi_1(z), \chi_2(z), \chi_3(z)) \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \alpha(z) + i \int_{s_0}^z V(w) \wedge \alpha'(w) dw \right\} \\ &= (\operatorname{Re} \{ \alpha_1(z) \}, \operatorname{Im} \{ \Psi_2(z) \}, \operatorname{Im} \{ \Psi_3(z) \}), \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde  $\Delta \subset \Omega$  é simplesmente conexo e as funções  $\Psi_2, \Psi_3$  são holomorfas em  $\Delta$ , dadas por:

$$\begin{aligned} \Psi_2(z) &= - \int_{s_0}^z V_3(w) \alpha'_1(w) dw, \\ \Psi_3(z) &= - \int_{s_0}^z V_2(w) \alpha'_1(w) dw. \end{aligned}$$

Assim, temos que em  $\Delta \cap \Delta^*$  vale  $\alpha_1(z) = \alpha_1^*(z)$ ,  $\Psi_k(z) = \Psi_k^*(z)$ , com  $k = 2, 3$ , afinal todas estas funções assumem valores reais quando restritas a  $I$ . Podemos então aplicar o Teorema 3.2.1 e o Corolário 3.1.5 extendendo a igualdade para  $\Omega$ . Por fim, de (3.17) temos:

$$(\chi_1(z), \chi_2(z), \chi_3(z)) = (\chi_1(\bar{z}), -\chi_2(\bar{z}), -\chi_3(\bar{z})), \quad \forall z \in \Omega.$$

(ii) Nessas novas condições, temos

$$\alpha(s) = (\alpha_1(s), 0, \alpha_3(s)) \quad e \quad V(s) = N(s, 0) = (V_1(s), 0, V_2(s)),$$

e então

$$V(s) \wedge \alpha'(s) = (0, V_3(s)\alpha'_1(s) - V_1(s)\alpha'_3(s), 0).$$

Portanto, da representação de Björling, temos

$$\begin{aligned} \chi(z) &= Re \left\{ \alpha(z) + i \int_{s_0}^z V(w) \wedge \alpha'(w) dw \right\} \\ &= (Re \{ \alpha_1(z) \}, Im \{ \Theta_2(z) \}, Re \{ \alpha_3(z) \}), \forall z \in \Delta, \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde  $\Delta$  é como em (i) e  $\Theta_2$  é uma função holomorfa em  $\Delta$  e é dada por

$$\Theta_2(z) = - \int_{s_0}^z [V_3(w)\alpha'_1(w) - V_1(w)\alpha'_3(w)] dw.$$

Por fim, temos que  $\alpha_1(z) = \alpha_1^*(z)$  e  $\Theta_2(z) = \Theta_2^*(z)$  para todo  $z \in \Delta \cap \Delta^*$ , e novamente  $\forall z \in \Omega$  pelo princípio da reflexão de Schwarz e o Corolário 3.1.5.

$$(\chi_1(z), \chi_2(z), \chi_3(z)) = (\chi_1(\bar{z}), -\chi_2(\bar{z}), \chi_3(\bar{z})), \quad \forall z \in \Omega.$$

□

**Definição 3.2.6** *Seja  $\chi : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma superfície tipo-espaço.*

- (i) *Uma curva tipo-espaço  $l \subset \chi(\Sigma)$  é dita um eixo de simetria de  $\chi$  se para todo  $p \in \chi(\Sigma) \setminus l$ , existe um  $q \in \chi(\Sigma)$  tal que o segmento  $\overline{pq} \subset \mathbb{L}^3$  intersecta  $l$  ortogonalmente e  $(p+q)/2 \in l$ .*
- (ii) *Um plano tipo-tempo  $\Pi \subset \mathbb{L}^3$  o qual intersecta ortogonalmente a superfície é dito um plano de simetria de  $\chi$  se para cada  $p \in \chi(\Sigma) \setminus \Pi$  existe um  $q \in \chi(\Sigma)$  tal que o segmento  $\overline{pq} \subset \mathbb{L}^3$  é ortogonal a  $\Pi$  e  $(p+q)/2 \in \Pi$ .*

Com essas definições e também com o Lema 3.2.5 conseguimos os seguintes princípios de simetria para superfícies máximas em  $\mathbb{L}^3$  :

**Teorema 3.2.7** *Seja  $\chi : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma superfície máxima, então*

- (i) *toda reta tipo-espaço contida em  $\chi(\Sigma)$  é um eixo de simetria de  $\chi$ , e*

(ii) *todo plano tipo-tempo que intersecta ortogonalmente  $\chi(\Sigma)$  é um plano de simetria de  $\chi$ .*

**Demonstração:** Faremos apenas a demonstração do item (i), já que para o item (ii) o processo é análogo.

Seja  $\chi(\Sigma)$  uma superfície máxima e seja  $l \subset \chi(\Sigma)$  um segmento de reta tipo-espaço. Sem perda de generalidade, podemos supor que  $l$  está contida no eixo  $x_1$ <sup>4</sup>. Assim, se  $p \in \chi(\Sigma) \setminus l$  é tal que  $p = (\chi_1(z), \chi_2(z), \chi_3(z))$ , temos que  $\chi_k(z) \neq 0$  para  $k = 2$  ou para  $k = 3$ , afinal  $p \notin l$ . Digamos (novamente sem perda de generalidade)  $\chi_2(z) \neq 0$ . Definindo então  $q \in \chi(\Sigma)$  por  $q = (\chi_1(\bar{z}), \chi_2(\bar{z}), \chi_3(\bar{z}))$ , pelo item (i) do Lema 3.2.5, temos:

$$\begin{aligned} \overline{pq} &= q - p \\ &= (\chi_1(\bar{z}) - \chi_1(z), \chi_2(\bar{z}) - \chi_2(z), -\chi_3(\bar{z}) - \chi_3(z)) \\ &= (0, -2\chi_2(z), -2\chi_3(z)), \end{aligned}$$

que é claramente ortogonal a  $l \subset \text{span}\{e_1\}$  e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(p + q) &= \frac{1}{2}(\chi_1(z) + \chi_1(\bar{z}), \chi_2(z) + \chi_2(\bar{z}), \chi_3(z) + \chi_3(\bar{z})) \\ &= (\chi_1(z), 0, 0) \in l. \end{aligned}$$

□

---

<sup>4</sup>No caso Euclideano, podemos transformar uma reta em outra através de um movimento rígido, isto é, uma translação seguida de uma transformação ortogonal, para o caso euclideano a diferença é que a segunda transformação seria lorentz-ortogonal, mas ainda teria a propriedade de levar retas em retas.



# Capítulo 4

## Exemplos

### 4.1 Superfície máxima ortogonal a uma curva plana tipo-espaço dada

Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$  definida por  $\alpha(s) = (\alpha_1(s), 0, \alpha_3(s))$  uma curva analítica tipo-espaço em  $\mathbb{L}^3$  contida no plano  $x_2 = 0$ . Existe uma única imersão máxima em  $\mathbb{L}^3$  que intersecta ortogonalmente o plano  $x_2 = 0$  ao longo de  $\alpha$ . Tal imersão é dada explicitamente por:

$$\chi(z) = \left( \operatorname{Re}\{\alpha_1(z)\}, \operatorname{Im} \left\{ \int_{s_0}^z \sqrt{[\alpha'_1(w)]^2 - [\alpha'_3(w)]^2} dw \right\}, \operatorname{Re}\{\alpha_3(z)\} \right), \quad (4.1)$$

onde consideramos  $\alpha(z)$  como a única extensão holomorfa de  $\alpha(s)$ , e válida no domínio onde ela estiver bem definida.

**Demonstração:** Por construção, temos que:  $\langle N(s, 0), \alpha'(s) \rangle_1 = 0$  e também  $\langle N(s, 0), e_2 \rangle_1 = 0$ , assim temos que

$$N(s, 0) = V(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge e_2}{|\alpha'(s) \wedge e_2|}$$

(podendo inverter o sinal caso a orientação temporal esteja contrária à dese-

jada.), então

$$\begin{aligned}
 V(s) &= \frac{1}{|\alpha'(s) \wedge e_2|} \alpha'(s) \wedge e_2 \\
 &= \frac{1}{|\alpha'(s) \wedge e_2|} (-\alpha'_3(s), 0, -\alpha'_1(s)) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{[\alpha'_1(s)]^2 - [\alpha'_3(s)]^2}} (-\alpha'_3(s), 0, -\alpha'_1(s)) \\
 &= \frac{1}{|\alpha'(s)|} (-\alpha'_3(s), 0, -\alpha'_1(s))
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Assim, se queremos obter a expressão obtida na representação de Björling em (3.10), precisamos calcular

$$\alpha(u) + i \int_{u_0}^u (V \wedge \alpha')(r) dr.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 (V \wedge \alpha')(u) &= \left( 0, -\frac{[\alpha'_1(u)]^2 - [\alpha'_3(u)]^2}{|\alpha'(u)|}, 0 \right) \\
 &= (0, -\sqrt{[\alpha'_1(u)]^2 - [\alpha'_3(u)]^2}, 0)
 \end{aligned}$$

E então, temos:

$$\alpha(u) + i \int_{u_0}^u (V \wedge \alpha')(r) dr = \left( \alpha_1(u), i \int_{u_0}^u -\sqrt{[\alpha'_1(r)]^2 - [\alpha'_3(r)]^2} dr, \alpha_3(u) \right),$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \chi(z) &= \operatorname{Re} \left\{ \alpha(z) + i \int_{s_0}^z (V \wedge \alpha')(w) dw \right\} \\
 &= \left( \operatorname{Re}\{\alpha_1(z)\}, \operatorname{Im} \left\{ \int_{s_0}^z \sqrt{[\alpha'_1(w)]^2 - [\alpha'_3(w)]^2} dw \right\}, \operatorname{Re}\{\alpha_3(z)\} \right),
 \end{aligned}$$

válido sempre que  $z \in \{s + it \in \mathbb{C} | s \in I, t \in \mathbb{R}\}$ , nos pontos em que a extensão é possível.

□

A seguir, daremos alguns exemplos que se enquadram neste caso.

## 4.2 Catenóide Hiperbólico

Sejam as condições de contorno  $\{\alpha, V\}$ , onde  $\alpha$  é dada por:

$$\alpha(s) = A(s, 0, \cos(s - \theta)), \text{ onde } A > 0, \theta \in \mathbb{R}, s \in \left(\theta - \frac{\pi}{2}, \theta + \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.3)$$

e  $V$  é obtida em termos de  $\alpha$  como em (4.2). Assim,

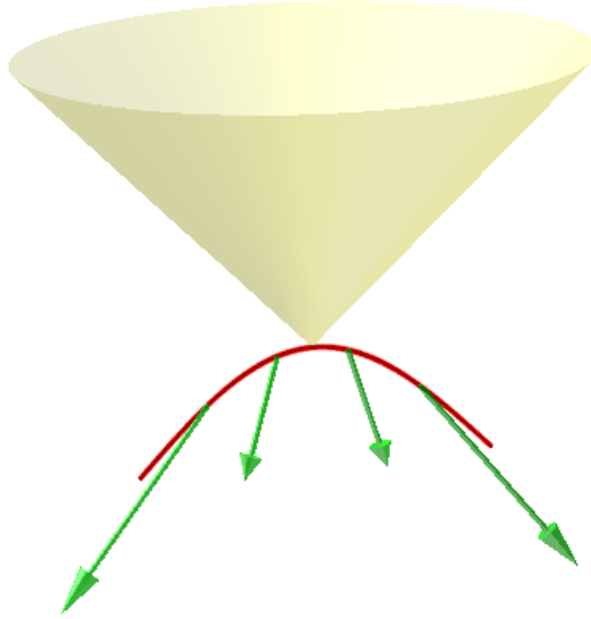


Figura 4.1: Condições de contorno  $\{\alpha, V\}$  para o Catenóide Hiperbólico.

$$\begin{aligned} \alpha_1(s) &= A \cdot s & \Rightarrow \alpha'_1(s) &= A, \\ \alpha_3(s) &= A \cdot \cos(s - \theta) & \Rightarrow \alpha'_3(s) &= -A \sin(s - \theta). \end{aligned}$$

Veja que  $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_1 = A^2(1 - \sin^2(s - \theta)) = A^2 \cos^2(s - \theta) > 0$ , portanto  $\alpha$  é uma curva analítica tipo-espaço contida no plano  $x_2 = 0$ . Além disso, temos que:

$$\begin{aligned} \sqrt{[\alpha'_1(s)]^2 - [\alpha'_3(s)]^2} &= \sqrt{A^2 \cdot (1 - \sin^2(s - \theta))} \\ &= A \cdot \cos(s - \theta), \end{aligned}$$

pois  $s \in (\theta - \frac{\pi}{2}, \theta + \frac{\pi}{2})$ .

Substituindo então na expressão (4.1), temos:

$$\begin{aligned}
 \chi_1(z) &= \operatorname{Re}\{Az\} \\
 &= As \\
 \chi_2(z) &= \operatorname{Im}\left\{\int_{\theta}^z A \cos(w - \theta) dw\right\} \\
 &= A \cdot \operatorname{Im}\{\operatorname{sen}(s - \theta + it)\} \\
 &= A \cdot \operatorname{senh}(t) \cos(s - \theta) \\
 \chi_3(z) &= \operatorname{Re}\{A \cos(z - \theta)\} \\
 &= A \cdot \operatorname{Re}\{\cos(s - \theta + it)\} \\
 &= A \cdot \cos(s - \theta) \cosh(t)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \chi(s, t) = A(s, \operatorname{senh}(t) \cos(s - \theta), \cos(s - \theta) \cosh(t)), \quad s \in \left(\theta - \frac{\pi}{2}, \theta + \frac{\pi}{2}\right), t \in \mathbb{R}.$$

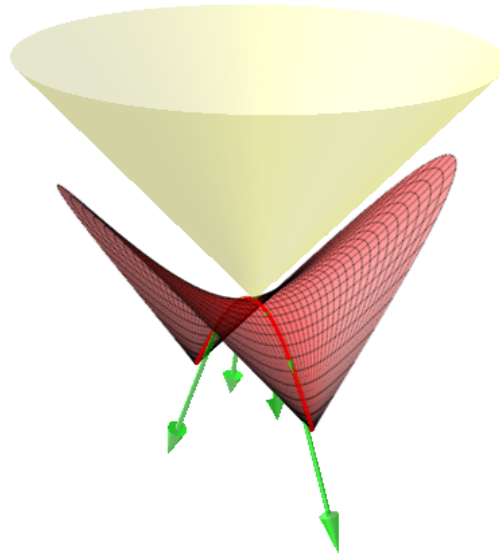


Figura 4.2: Gráfico do Catenóide Hiperbólico com  $A = 1$ ,  $\theta = 0$ .

**Observação 4.2.1** A escolha do campo  $V$  orientado para o passado aqui foi por uma questão estética, porém o Corolário 3.2.4 e o item (ii) do Lema 3.2.5 garantem que a solução está adequada.

### 4.3 Catenóide elíptico

Sejam as condições de contorno  $\{\alpha, V\}$ , onde  $\alpha$  é dada por:

$$\alpha(s) = A(\sinh(s + \theta), 0, s), \text{ onde } \theta \in \mathbb{R}, s > -\theta \quad (4.4)$$

e  $V$  é obtida em termos de  $\alpha$  como em (4.2).

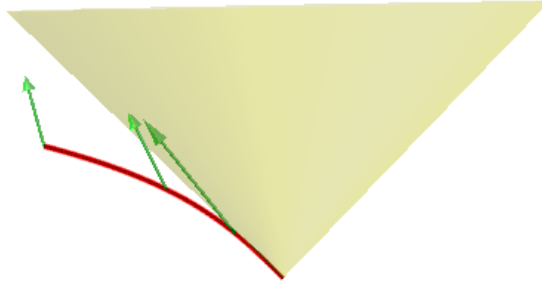


Figura 4.3: Condições de contorno  $\{\alpha, V\}$  para o Catenóide Elíptico.

Veja que  $\alpha$  é analítica tipo-espaço:

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_1 = A^2(\cosh^2(s + \theta) - 1) = A^2 \sinh^2(s + \theta) > 0, \quad (4.5)$$

além disso, temos que:

$$\begin{aligned} \sqrt{[\alpha'_1(s)]^2 - [\alpha'_3(s)]^2} &= \sqrt{A^2 \cdot (\cosh^2(s + \theta) - 1)} \\ &= A \cdot \sinh(s + \theta), \end{aligned}$$

pois  $s > -\theta$ .

Substituindo então na expressão (4.1), temos:

$$\begin{aligned} \chi_1(z) &= \operatorname{Re}\{A \cdot \sinh(z + \theta)\} \\ &= \operatorname{Re}\{-A \cdot i \cdot \sin(i \cdot (z + \theta))\} \\ &= \operatorname{Re}\{-A \cdot i \cdot \sin(-t + i(s + \theta))\} \\ &= A \cdot \sinh(s + \theta) \cos(t) \\ \chi_2(z) &= \operatorname{Im} \left\{ \int_{-\theta}^z A \cdot \sinh(w + \theta) dw \right\} \\ &= A \cdot \operatorname{Im} \{ \cosh(s + \theta + it) \} \\ &= A \cdot \operatorname{Im} \{ \cos(-t + i \cdot (s + \theta)) \} \\ &= A \cdot \sin(t) \sinh(s + \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_3(z) &= \operatorname{Re}\{Az\} \\ &= As\end{aligned}$$

$$\therefore \chi(s, t) = A(\sinh(s + \theta) \cos(t), \sin(t) \sinh(s + \theta), s), \quad s \in (-\theta, \infty), t \in \mathbb{R}.$$

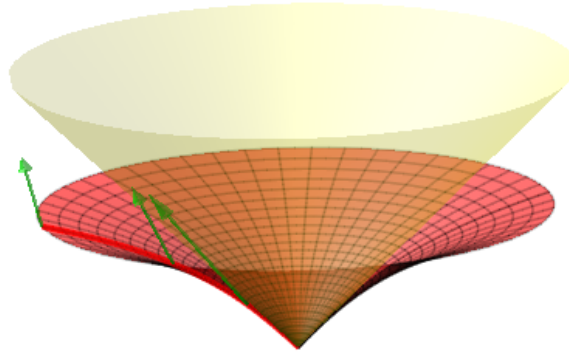


Figura 4.4: Gráfico do Catenóide Elíptico com  $A = 1$ ,  $\theta = 0$ .

## 4.4 O referencial canônico nulo

Para o próximo exemplo, precisaremos introduzir o referencial canônico nulo de  $\mathbb{L}^3$ , que é a base ordenada  $\mathcal{F}$  definida por:

$$\mathcal{F} = \left\{ \left( 2^{-\frac{1}{2}}, 0, 2^{-\frac{1}{2}} \right)_{\mathcal{B}}, \left( 2^{-\frac{1}{2}}, 0, -2^{-\frac{1}{2}} \right)_{\mathcal{B}}, (0, 1, 0)_{\mathcal{B}} \right\} = \{v_1, v_2, v_3\},$$

onde  $\mathcal{B}$  é a base canônica.

**Proposição 4.4.1** *Sejam  $a, b \in \mathbb{L}^3$ , onde  $a = (a_1, a_2, a_3)_{\mathcal{F}}$  e  $b = (b_1, b_2, b_3)_{\mathcal{F}}$ , então segue que:*

- (i)  $a \wedge b = (a_3b_1 - a_1b_3, a_2b_3 - a_3b_2, a_1b_2 - a_2b_1)_{\mathcal{F}}$ ,
- (ii)  $\langle a, a \rangle_1 = 2a_1a_2 - (a_3)^2$ .

**Demonstração:** Fazemos as contas na base  $\mathcal{B}$ :

Para o item (i), temos:

$$\begin{aligned}v_1 \wedge v_2 &= (0, 2^{-1} + 2^{-1}, 0)_{\mathcal{B}} = v_3 \\ v_2 \wedge v_3 &= (2^{-\frac{1}{2}}, 0, -2^{-\frac{1}{2}})_{\mathcal{B}} = v_2 \\ v_3 \wedge v_1 &= (2^{-\frac{1}{2}}, 0, 2^{-\frac{1}{2}})_{\mathcal{B}} = v_1\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
 a \wedge b &= \left( \sum_{i=1}^3 a_i v_i \right) \wedge \left( \sum_{j=1}^3 b_j v_j \right) \\
 &= (a_3 b_1 - a_1 b_3) v_1 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) v_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) v_3 \\
 &= (a_3 b_1 - a_1 b_3, a_2 b_3 - a_3 b_2, a_1 b_2 - a_2 b_1)_{\mathcal{F}},
 \end{aligned}$$

como queríamos.

Para o item (ii), calculemos o produto escalar:

$$\begin{aligned}
 \langle v_1, v_1 \rangle_1 &= 0 \\
 \langle v_2, v_2 \rangle_1 &= 0 \\
 \langle v_3, v_3 \rangle_1 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle v_1, v_2 \rangle_1 &= 1 \\
 \langle v_1, v_3 \rangle_1 &= 0 = \langle v_2, v_3 \rangle
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \langle a, a \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^3 a_i v_i, \sum_{j=1}^3 a_j v_j \right\rangle_1 \\
 &= (a_1)^2 \langle v_1, v_1 \rangle_1 + (a_2)^2 \langle v_2, v_2 \rangle_1 + (a_3)^2 \langle v_3, v_3 \rangle_1 \\
 &\quad + 2 \cdot \left( a_1 a_2 \langle v_1, v_2 \rangle_1 + a_2 a_3 \langle v_2, v_3 \rangle_1 + a_1 a_3 \langle v_1, v_3 \rangle_1 \right) \\
 &= 2a_1 a_2 + (a_3)^2
 \end{aligned}$$

□

**Observação 4.4.2** Apesar de termos uma base apenas com vetores unitários e tipo-luz, a base  $\mathcal{F}$  não é uma base de Sylvester. Em (4.6) vê-se que  $\mathcal{F}$  não é uma base ortogonal.

Munidos destas relações para o referencial  $\mathcal{F}$ , queremos obter a expressão (4.1) nessa nova base.

Seja  $\alpha$  uma curva analítica tipo-espaço contida no plano  $x_2 = 0$  cujas coordenadas na base canônica  $\mathcal{B}$  são:

$$\alpha(s) = (\alpha_1(s), 0, \alpha_3(s))_{\mathcal{B}}. \tag{4.7}$$

Denotando por  $M = [M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}}$  a matriz mudança de base de  $\mathcal{F}$  para  $\mathcal{B}$ , temos:

$$M = \begin{bmatrix} 2^{-\frac{1}{2}} & 2^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2^{-\frac{1}{2}} & -2^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

A partir de  $M$ , podemos então obter a matriz mudança de base de  $\mathcal{B}$  para  $\mathcal{F}$  denotada por  $M^{-1} = [M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}$ :

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 2^{-\frac{1}{2}} & 0 & 2^{-\frac{1}{2}} \\ 2^{-\frac{1}{2}} & 0 & -2^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

portanto, podemos escrever  $\alpha$  na base  $\mathcal{F}$ :

$$\begin{aligned} [\alpha]^{\mathcal{F}} &= [M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} [\alpha]^{\mathcal{B}} \\ &= \begin{bmatrix} 2^{-\frac{1}{2}} & 0 & 2^{-\frac{1}{2}} \\ 2^{-\frac{1}{2}} & 0 & -2^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1(s) \\ 0 \\ \alpha_3(s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^{-\frac{1}{2}}(\alpha_1 + \alpha_3)(s) \\ 2^{-\frac{1}{2}}(\alpha_1 - \alpha_3)(s) \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vamos denotar  $2^{-\frac{1}{2}}(\alpha_1 + \alpha_3)(s) = a(s)$  e  $2^{-\frac{1}{2}}(\alpha_1 - \alpha_3)(s) = b(s)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= (a(s), b(s), 0)_{\mathcal{F}} \\ \alpha'(s) &= (a'(s), b'(s), 0)_{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

O próximo passo é obter uma expressão paramétrica para  $\chi$  como em (4.1) nessa nova base  $\mathcal{F}$ :

$$\begin{aligned} V(s) = N(s, 0) &= \frac{1}{|\alpha' \wedge e_2|} [\alpha' \wedge e_2]_{\mathcal{F}} \\ &\stackrel{(i)}{=} \frac{1}{|\alpha' \wedge e_2|} (-a'(s), b'(s), 0)_{\mathcal{F}} \\ &\stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{\sqrt{|-2 \cdot a'(s) \cdot b'(s)|}} (-a'(s), b'(s), 0)_{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

Como  $\alpha$  é uma curva tipo-espaço, sabemos que

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_1 &> 0 \\ \therefore 2 \cdot a'(s) \cdot b'(s) &> 0 \end{aligned}$$



e então, temos que

$$V(s) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot a'(s) \cdot b'(s)}} (-a'(s), b'(s), 0)_{\mathcal{F}}. \quad (4.10)$$

Podemos então calcular  $V(s) \wedge \alpha'(s)$  na base  $\mathcal{F}$  usando (i):

$$\begin{aligned} V(s) \wedge \alpha'(s) &= \left( 0, 0, \frac{-2 \cdot a'(s) \cdot b'(s)}{\sqrt{2 \cdot a'(s) \cdot b'(s)}} \right)_{\mathcal{F}} \\ &= (0, 0, -\sqrt{2 \cdot a'(s) \cdot b'(s)})_{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

Assim, a expressão

$$\begin{aligned} \chi(s, t) &= Re \left\{ [\alpha(z)]_{\mathcal{F}} + i \cdot \int_{s_0}^z [(V \wedge \alpha')(w)]_{\mathcal{F}} dw \right\} \\ &= Re \left\{ \left( a(z), b(z), i \cdot \int_{s_0}^z -\sqrt{2 \cdot a'(w) \cdot b'(w)} dw \right)_{\mathcal{F}} \right\} \end{aligned}$$

e portanto

$$\chi(s, t) = \left( Re \{a(z)\}, Re \{b(z)\}, Im \left\{ \int_{s_0}^z \sqrt{2 \cdot a'(w) \cdot b'(w)} dw \right\} \right)_{\mathcal{F}}. \quad (4.11)$$

Finalmente estamos prontos para o próximo exemplo.

## 4.5 Catenóide Parabólico

Dadas as condições de contorno  $\{\alpha, V\}$ , onde

$$\alpha(s) = A \left( s + B, \frac{1}{6}s^3 + \frac{B}{2}s^2 + \frac{B^2}{2}s, 0 \right)_{\mathcal{F}} \quad (4.12)$$

e  $V$  é obtida em termos de  $\alpha$  como em (4.10).

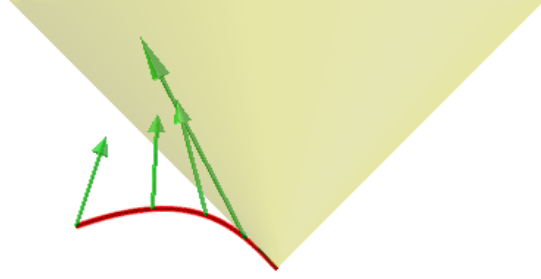


Figura 4.5: Condições de contorno  $\{\alpha, V\}$  para o Catenóide Parabólico.

onde  $A > 0$ ,  $B \in \mathbb{R}$ ,  $s > -B$ . Veja que  $\alpha$  é tipo-espaço, afinal:

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= A(1, \frac{1}{2}s^2 + Bs + \frac{B^2}{2}, 0)_{\mathcal{F}} \\ &= \left( A, \frac{A}{2}(s+B)^2, 0 \right)_{\mathcal{F}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_1 &\stackrel{(ii)}{=} 2 \cdot (A) \cdot \left( \frac{A}{2}(s+B)^2 \right) + (0)^2 \\ &= A^2(s+B)^2 > 0.\end{aligned}$$

Portanto  $\alpha$  é uma curva analítica tipo-espaço. Nosso objetivo é utilizar a relação obtida em (4.11), então:

$$\begin{aligned}a(s) &= A \cdot (s+B) & \Rightarrow a'(s) &= A, \\ b(s) &= A \cdot \left( \frac{1}{6}s^3 + \frac{B}{2}s^2 + \frac{B^2}{2}s \right) & \Rightarrow b'(s) &= \frac{A}{2}(s+B)^2.\end{aligned}$$

Substituindo então na expressão obtida em (4.11), temos:

$$\begin{aligned}
 \chi_1(z) &= \operatorname{Re}\{A \cdot (z + B)\} \\
 &= A \cdot (s + B) \\
 \chi_2(z) &= \operatorname{Re} \left\{ A \cdot \left( \frac{1}{6}z^3 + \frac{B}{2}z^2 + \frac{B^2}{2}z \right) \right\} \\
 &= A \cdot \left( \frac{1}{6}(s^3 - 3st^2) + \frac{B}{2}(s^2 - t^2) + \frac{B^2}{2}s \right) \\
 &= A \cdot \left( -\frac{t^2}{2}(s + B) + \frac{1}{6}s^3 + \frac{B}{2}s^2 + \frac{B^2}{2}s \right) \\
 \chi_3(z) &= \operatorname{Im} \left\{ \int_{-B}^z \sqrt{2 \cdot (A) \cdot \left( \frac{A}{2}(w + B)^2 \right)} dw \right\} \\
 &= A \cdot \operatorname{Im} \left\{ \frac{(z + B)^2}{2} \right\} \\
 &= A \cdot \operatorname{Im} \left\{ \frac{(s + B)^2 - t^2 + 2(s + B)it}{2} \right\} \\
 &= A \cdot t \cdot (s + B)
 \end{aligned}$$

Portanto, temos que para todo  $(s, t) \in (-B, \infty) \times \mathbb{R}$ :

$$\chi(s, t) = A \left( s + B, -\frac{t^2}{2}(s + B) + \frac{1}{6}s^3 + \frac{B}{2}s^2 + \frac{B^2}{2}s, t \cdot (s + B) \right). \quad (4.13)$$

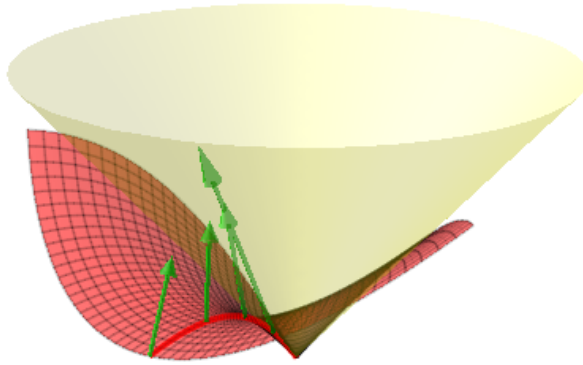


Figura 4.6: Gráfico do Catenóide Parabólico com  $A = 1$ ,  $B = 0$ .

Cabe aqui uma observação sobre o referencial nulo  $\mathcal{F}$  utilizado. A expressão aqui obtida é um pouco mais complicada que a encontrada em [14],

porém, diferentemente das outras parametrizações do catenóide parabólico que costumamos encontrar, a imersão obtida em (4.13) é conforme.

Para os próximos exemplos, voltaremos a utilizar a base canônica  $\mathcal{B}$ .

## 4.6 Helicóide do primeiro tipo

Dadas as condições de contorno  $\{\alpha, V\}$  :

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (s, 0, 0), \\ V(s) &= \frac{-1}{\sqrt{k^2 s^2 - 1}}(0, 1, ks), \quad k > 0, \quad s > \frac{1}{k},\end{aligned}$$

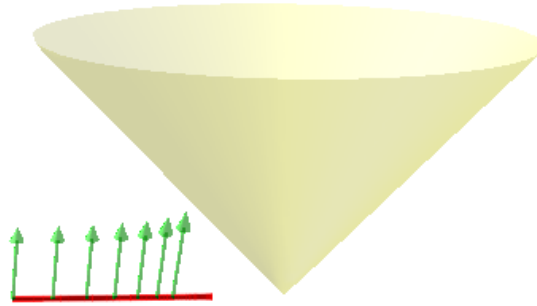


Figura 4.7: Condições de contorno  $\{\alpha, V\}$  para o Helicóide do Primeiro tipo.

$\alpha'(s) = e_1$ , então  $\alpha$  é tipo-espaço. Fazendo a mudança de parâmetros  $ks = \cosh(u)$ ,  $u > 0$ , temos:

$$\begin{aligned}\alpha(u) &= \left( \frac{1}{k} \cosh(u), 0, 0 \right), & V(u) &= \frac{-1}{\sinh(u)}(0, 1, \cosh(u)). \\ \alpha'(u) &= \left( \frac{1}{k} \sinh(u), 0, 0 \right),\end{aligned}$$

Para chegarmos na representação de Björling em (3.10), calculamos:

$$(V \wedge \alpha')(u) = \left( 0, -\frac{1}{k} \cosh(u), -\frac{1}{k} \right).$$

Podemos então encontrar o valor da expressão abaixo:

$$\begin{aligned}
 & \alpha(u) + i \int_{u_0}^u (V \wedge \alpha')(r) dr \\
 &= \left( \frac{1}{k} \cosh(u), 0, 0 \right) + i \int_{u_0}^u \left( 0, -\frac{1}{k} \cosh(r), -\frac{1}{k} \right) dr \\
 &= \left( \frac{1}{k} \cosh(u), -\frac{i}{k} (\sinh(u) - \sinh(u_0)), -\frac{i}{k} (u - u_0) \right).
 \end{aligned}$$

Denotando  $z = u + iv$ , conseguimos a parametrização da superfície em questão:

$$\begin{aligned}
 \chi(u, v) &= \operatorname{Re} \left\{ \alpha(z) + i \int_{u_0}^z (V \wedge \alpha')(w) dw \right\} \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ \left( \frac{1}{k} \cosh(z), -\frac{i}{k} (\sinh(z) - \sinh(u_0)), -\frac{i}{k} (z - u_0) \right) \right\} \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ \left( \frac{1}{k} \cos(-v + iu), -\frac{1}{k} \sin(-v + iu), \frac{v}{k} \right) \right\} \\
 &= \left( \frac{1}{k} \cos(v) \cosh(u), +\frac{1}{k} \sin(v) \cosh(u), \frac{v}{k} \right), \\
 \therefore \chi(u, v) &= \frac{1}{k} (\cos(v) \cosh(u), \sin(v) \cosh(u), v), \quad u \neq 0, \quad v \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

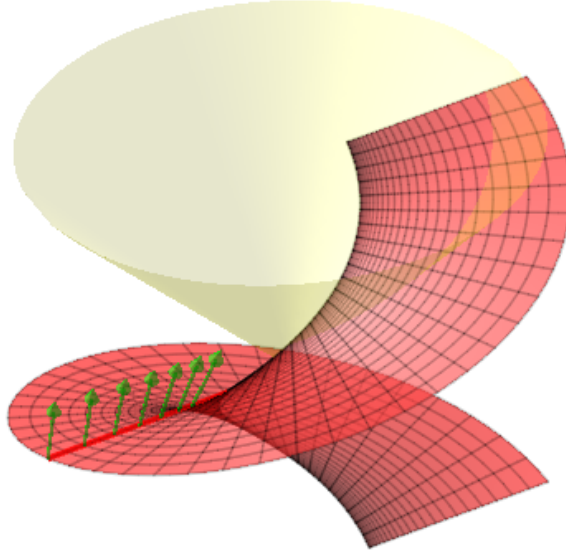


Figura 4.8: Gráfico do Helicóide do Primeiro tipo com  $k = 1$ .

## 4.7 Helicóide do segundo tipo

Dadas as condições de contorno  $\{\alpha, V\}$  :

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (s, 0, 0), \\ V(s) &= \frac{-1}{\sqrt{1 - k^2 s^2}}(0, ks, 1), \quad k > 0, |s| < \frac{1}{k},\end{aligned}$$

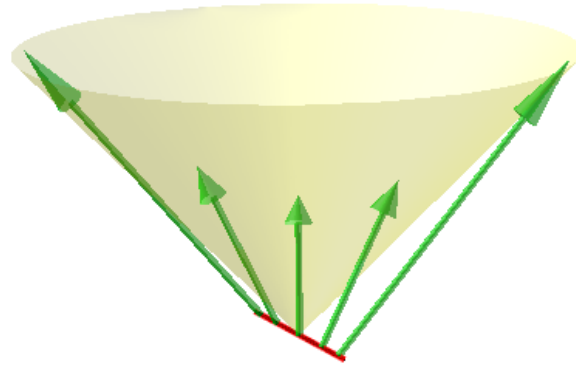


Figura 4.9: Condições de contorno  $\{\alpha, V\}$  para o Helicóide do Segundo tipo.

$\alpha'(s) = e_1$ , então  $\alpha$  é tipo-espaço. Fazendo a mudança de parâmetros  $ks = \sin(u)$ ,  $u > 0$ , temos:

$$\begin{aligned}\alpha(u) &= \left( \frac{1}{k} \sin(u), 0, 0 \right), & V(u) &= \frac{-1}{\cos(u)}(0, \sin(u), 1). \\ \alpha'(u) &= \left( \frac{1}{k} \cos(u), 0, 0 \right),\end{aligned}$$

Para chegarmos na representação de Björling em (3.10), calculamos:

$$(V \wedge \alpha')(u) = \left( 0, -\frac{1}{k}, -\frac{1}{k} \sin(u) \right)$$

Podemos então encontrar o valor da expressão abaixo:

$$\begin{aligned}\alpha(u) + i \int_{u_0}^u (V \wedge \alpha')(r) dr &= \left( \frac{1}{k} \sin(u), 0, 0 \right) + i \int_{u_0}^u \left( 0, -\frac{1}{k}, -\frac{1}{k} \sin(r) \right) dr \\ &= \left( \frac{1}{k} \sin(u), -\frac{i}{k}(u - u_0), \frac{i}{k}(\cos(u) - \cos(u_0)) \right)\end{aligned}$$

Denotando  $z = u + iv$ , conseguimos a parametrização da superfície em questão:

$$\begin{aligned}\chi(u, v) &= \operatorname{Re} \left\{ \alpha(z) + i \int_{u_0}^z (V \wedge \alpha')(w) dw \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \left( \frac{1}{k} \operatorname{sen}(z), -\frac{i}{k}(z - u_0), \frac{i}{k} (\cos(z) - \cos(u_0)) \right) \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \left( \frac{1}{k} \operatorname{sen}(u + iv), -\frac{i}{k}((u - u_0) + iv), \frac{i}{k} \cos(u + iv) \right) \right\},\end{aligned}$$

$$\therefore \chi(u, v) = \frac{1}{k} (\operatorname{sen}(u) \cosh(v), v, \operatorname{sen}(u) \sinh(v)), \quad u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad v \in \mathbb{R}.$$

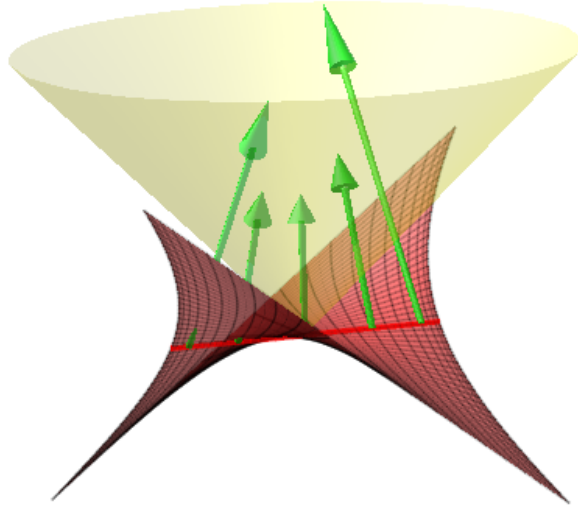


Figura 4.10: Gráfico do Helicóide do Segundo tipo com  $k = 1$ .

## 4.8 Superfície Regrada de Cayley

Dadas as condições de contorno  $\{\alpha, V\}$  :

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (s, 0, 0), \\ V(s) &= \frac{1}{\sqrt{1+2ks}}(0, ks, 1+ks), \quad k \neq 0, \quad 1+2ks > 0,\end{aligned}$$

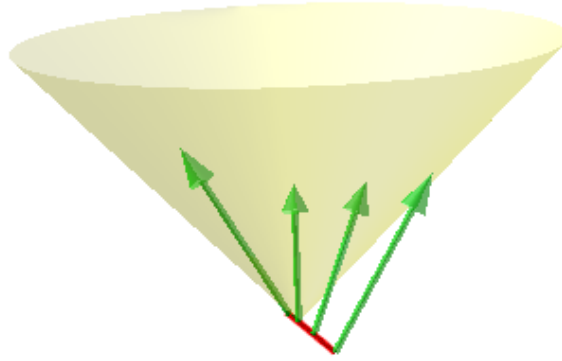


Figura 4.11: Condições de contorno  $\{\alpha, V\}$  para a Superfície Regrada de Cayley.

Como  $\alpha'(s) = e_1$ , então  $\alpha$  é tipo-espaço. Fazendo a mudança de parâmetros  $u^2 = 1 + 2ks$ ,  $u > 0$ , temos:

$$\begin{aligned}\alpha(u) &= \left( \frac{u^2 - 1}{2k}, 0, 0 \right), & V(u) &= \left( 0, \frac{u^2 - 1}{2u}, \frac{u^2 + 1}{2u} \right), \\ \alpha'(u) &= \left( \frac{u}{k}, 0, 0 \right),\end{aligned}$$

Para chegarmos na representação de Björling em (3.10), calculamos:

$$(V \wedge \alpha')(u) = \left( 0, \frac{u^2 + 1}{2k}, \frac{u^2 - 1}{2k} \right)$$

Podemos então encontrar o valor da expressão abaixo:

$$\begin{aligned}& \alpha(u) + i \int_{u_0}^u (V \wedge \alpha')(r) dr \\ &= \left( \frac{u^2 - 1}{2k}, 0, 0 \right) + i \int_{u_0}^u \left( 0, \frac{r^2 + 1}{2k}, \frac{r^2 - 1}{2k} \right) dr \\ &= \frac{1}{2k} \left( u^2 - 1, i \cdot \left( \frac{u^3 - u_0^3}{3} + u - u_0 \right), i \cdot \left( \frac{u^3 - u_0^3}{3} - u + u_0 \right) \right).\end{aligned}$$



Denotando  $z = u + iv$ , conseguimos a parametrização da superfície em questão:

$$\begin{aligned}
 & \chi(u, v) \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ \alpha(z) + i \int_{u_0}^z (V \wedge \alpha')(w) dw \right\} \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2k} \left( z^2 - 1, i \cdot \left( \frac{z^3 - u_0^3}{3} + z - u_0 \right), i \cdot \left( \frac{z^3 - u_0^3}{3} - z + u_0 \right) \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2k} \operatorname{Re} \left\{ \left( u^2 - v^2 - 1, \frac{i}{3} (i3u^2v - iv^3 + i3v), \frac{i}{3} (i3u^2v - iv^3 - i3v) \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{6k} \operatorname{Re} \left\{ (3u^2 - 3v^2 - 3, -3u^2v + v^3 - 3v, -3u^2v + v^3 + 3v) \right\}, \\
 &\therefore \chi(u, v) = \frac{1}{6k} (3u^2 - 3v^2 - 3, -3u^2v + v^3 - 3v, -3u^2v + v^3 + 3v), \\
 &\forall (u, v) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

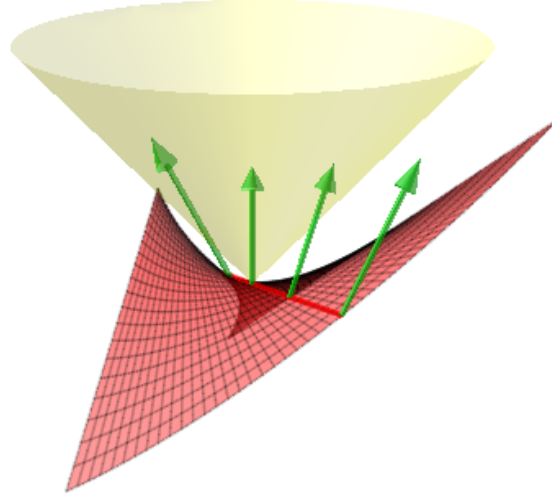


Figura 4.12: Gráfico da Superfície Regrada de Cayley com  $k = 1$ .

# Apêndice - Superfícies Máximas como pontos críticos do funcional área

Esse apêndice é uma adaptação da demonstração encontrada em [5] (p. 234-236) feita para superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$ . Lembremos que uma superfície parametrizada tipo-espaço  $\chi : \Sigma \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$  é dita máxima quando sua curvatura média é identicamente nula.

Seja  $\chi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma superfície parametrizada regular. Escolha um conjunto  $D \subset U$  aberto, limitado e conexo cuja fronteira é a imagem de um círculo por um homeomorfismo diferenciável que é regular, e uma função diferenciável  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\bar{D}$  é o fecho de  $D$ . A variação normal de  $\chi(\bar{D})$ , determinada por  $h$  é a aplicação dada por:

$$\begin{aligned}\varphi : \bar{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow \mathbb{L}^3 \\ ((u, v), t) &\mapsto \varphi(u, v, t)\end{aligned}$$

para algum  $\varepsilon > 0$  arbitrário, e

$$\varphi(u, v, t) = \chi(u, v) + t \cdot h(u, v) \cdot N(u, v), \quad (u, v) \in \bar{D}, t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

onde  $N$  é a aplicação Normal de Gauss definida em (2.4.4).

Para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  fixado, a aplicação  $\chi^t : D \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\chi^t(u, v) = \varphi(u, v, t)$$

é uma superfície parametrizada com

$$\begin{aligned}\frac{\partial \chi^t}{\partial u} &= \chi_u + thN_u + th_uN, \\ \frac{\partial \chi^t}{\partial v} &= \chi_v + thN_v + th_vN.\end{aligned}$$

Denotamos então por  $E, F$  e  $G$  os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\chi$ , em outras palavras:

$$\begin{aligned} E &= \langle \chi_u, \chi_u \rangle_1 \\ F &= \langle \chi_u, \chi_v \rangle_1 \\ G &= \langle \chi_v, \chi_v \rangle_1 \end{aligned}$$

e chamaremos de  $E^t, F^t$  e  $G^t$  os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\chi^t$ :

$$\begin{aligned} E^t &= \langle \chi_u^t, \chi_u^t \rangle_1 \\ &= E + th(\langle \chi_u, N_u \rangle_1 + \langle \chi_u, N_u \rangle_1) + t^2(h^2 \langle N_u, N_u \rangle_1 + h_u h_u), \\ F^t &= \langle \chi_u^t, \chi_v^t \rangle_1 \\ &= F + th(\langle \chi_u, N_v \rangle_1 + \langle \chi_v, N_u \rangle_1) + t^2(h^2 \langle N_u, N_v \rangle_1 + h_u h_v), \\ G^t &= \langle \chi_v^t, \chi_v^t \rangle_1 \\ &= G + th(\langle \chi_v, N_v \rangle_1 + \langle \chi_v, N_v \rangle_1) + t^2(h^2 \langle N_v, N_v \rangle_1 + h_v h_v). \end{aligned}$$

Sejam  $e, f$  e  $g$  os coeficientes da segunda forma fundamental de  $\chi$ , temos também as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \langle \chi_u, N_u \rangle_1 &= -e = -\langle \chi_{uu}, N_v \rangle_1, \\ \langle \chi_u, N \rangle_1 + \langle \chi_v, N_u \rangle_1 &= -2f = -2\langle \chi_{uv}, N \rangle_1, \\ \langle \chi_v, N_v \rangle_1 &= -g = -\langle \chi_{vv}, N \rangle_1. \end{aligned}$$

Encontramos então que a curvatura média  $H$  pode ser escrita em termos dos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental:

$$H = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}.$$

Assim, calculamos:

$$\begin{aligned} E^t G^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + R \\ &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R, \end{aligned}$$

onde  $R$  é tal que o limite  $R/t$  vai pra zero quando  $t$  vai pra zero.

Segue então que, se  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno,  $\chi^t$  é também uma superfície parametrizada regular tipo-espaço. Além disso, o funcional área em  $\mathbb{L}^3$  pode ser definido (como em [15], p.48) por:

$$A(t) = \int_U dA_t,$$

onde  $dA_t$  é o elemento de área em  $U$  induzido pela métrica do pullback de  $\chi^t$ , denotada por  $\chi^{t*}(\langle \cdot, \cdot \rangle_1)$  que é claramente uma métrica Riemanniana. Além disso, a área  $A(t)$  de  $\chi^t(\bar{D})$  é:

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{\bar{D}} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} du dv \\ &= \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4thH + \bar{R}\sqrt{EG - F^2}} du dv, \end{aligned}$$

onde  $\bar{R} = R/(EG - F^2)$ . Assim, sendo  $\varepsilon$  pequeno,  $A(t)$  é uma função diferenciável e a sua derivada em  $t = 0$  é:

$$A'(0) = - \int_{\bar{D}} 2hH \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (4.14)$$

Portanto, em (4.14) vemos que se  $\chi$  é uma superfície máxima ( $H \equiv 0$ ), então temos que qualquer região limitada  $\chi(\bar{D})$  de uma superfície máxima é um ponto crítico para a função área para qualquer variação normal de  $\chi(\bar{D})$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] ABLOWITZ, M.J.; FOKAS, A.S., Complex variables: Introduction and applications, *Cambridge University Press*, 2nd ed., (1997).
- [2] ALÍAS, L.J.; CHAVES, R.M.B.; MIRA, P. Björling problem for maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space, *Math.Proc. Camb. Phil. Soc.*, 134 (2003), 289-316.
- [3] BARBOSA, J.L.; COLARES, A.G., Minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$ . Lecture Notes in Mathematics 1195, *Springer-Verlag*, (1986).
- [4] BJÖRLING, E.G., In integrationem aequationis derivatarum partialum superfici, cujus in puncto unoquoque principales ambo radii curvedinis aequales sunt sngoque contrario, *Arch. Math. Phys. (1)* 4, (1844), 290-315.
- [5] CARMO, M.P. DO, Differential Geometry of Curves and Surfaces, *Prentice Hall, New Jersey*, Book, (1976).
- [6] CARMO, M.P. DO, Geometria Riemanniana, *IMPA, Rio de Janeiro*, Book, (2015).
- [7] CHAVES, R.M.B; DUSSAN, M.P.; MAGID, B. Björling problem for timelike surfaces in the Lorentz-Minkowski space *J. Math. Anal. Appl.*, 337, (2011), 481-494
- [8] CHERN, S.-S. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6 (1955), 771-782.
- [9] DIERKES, U. ET AL, Minimal Surfaces I. A series of comprehensive studies in mathematics, 295, *Springer-Verlag*, (1992).
- [10] ESPINAR, J.M. La ecuación de Codazzi en superficies., *Editorial de la Universidad de Granada*, Tese de doutorado, (2008).

- [11] ESTUDILLO, F.J.M.; ROMERO, A. Generalized maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space  $L^3$ , *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 111, (1992), 515-524.
- [12] FOLLAND G. B., Introduction to partial differential equations, *Princeton University Press*, 2nd ed., (1995).
- [13] GRAY, A. Modern differential geometry of curves and surfaces, *CRC Press, Boca Raton, FL*, (1993).
- [14] KOBAYASHI, O. Maximal Surfaces in the 3-Dimensional Minkowski Space  $L^3$ , *Tokyo Journal of Mathematics*, 6(2), (1983), 297-309.
- [15] LÓPEZ, R. Differential Geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, *Universidad de Granada, Granada*, (2000)
- [16] MARSDEN, J.E.; TIPLER, F.J., Maximal hypersurfaces and foliations of constant mean curvature in general relativity, *PHYSICS REPORTS (Review Section of Physics Letters)*, 66(3), (1980), 109-139.
- [17] O'NEILL, B. Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity, *Academic Press*, Book, (1983).
- [18] RODRIGUES C. M. F., Teoria das Funções de Uma Variável Complexa, *Edições de Livros de Ensino Universitário (LEU)*, (1979).
- [19] SCHWARZ, H.A., *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, *Springer-Verlag*, (1890).
- [20] SYLVESTER, J. J., XIX. A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares., *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 4(23), (1852), 138-142.
- [21] TITCHMARSH E. C. ET AL, The Theory of Functions, *Oxford University Press*, 2nd ed., (1939).